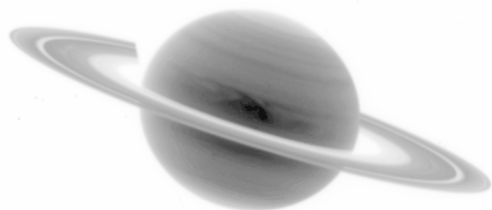
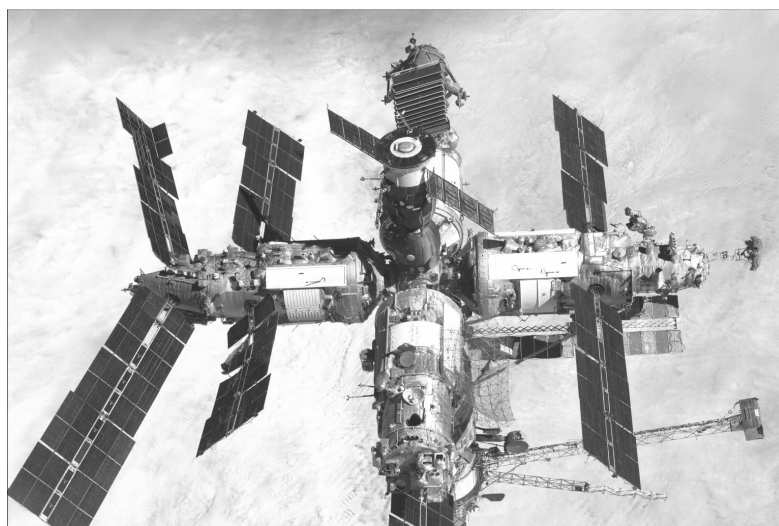
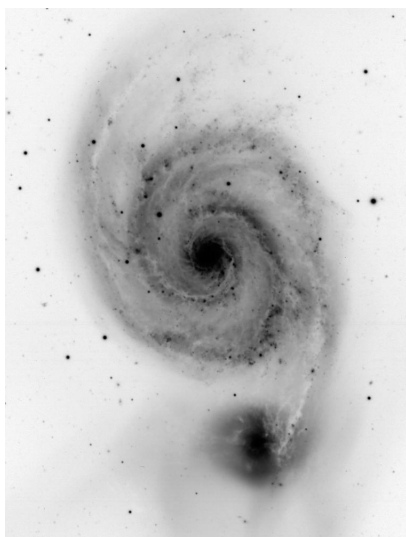


Хоперсков А.В., Храпов С.С.



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
И ОСНОВЫ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
(теория и задачи)



УДК 530.1

X72

ББК 22.31

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного университета

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. **М.Б. Белоненко**;

д-р физ.-мат. наук, доцент, **Н.Г. Лебедев**

Хоперсков А.В., Храпов С.С.

X72 Теоретическая механика и основы механики сплошной среды (теория и задачи) : Учебное пособие. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2006. – 104 с.

ISBN 5-03-003139-1

Представленный в учебном пособии материал соответствует государственному стандарту дисциплины “Механика и основы механики сплошной среды” для физических специальностей. В нем нашел отражение многолетний опыт чтения данного курса авторами в Волгоградском государственном университете. Книга снабжена большим количеством иллюстративного материала. Пособие содержит более 350 задач разной степени сложности, многие из которых снабжены ответом.

Отличительной особенностью данного пособия является большая подборка задач по механике жидкости, газа и плазмы, волновой гидродинамике, устойчивости течений.

Утверждено решением учебно-методической комиссии
физического факультета ВолГУ

ББК 22.31

ISBN 5-03-003139-1

© А.В. Хоперсков, С.С. Храпов 2006

© Издательство Волгоградского

государственного университета, 2006

Оглавление

К читателю	5
1. Уравнения движения и их интегрирование	6
1.1. Одномерное движение	7
1.1.1. Теория	7
1.1.2. Задачи	8
1.2. Движение в центральном поле	13
1.2.1. Теория	13
1.2.2. Задачи	14
1.3. Рассеяние частиц	19
1.3.1. Теория	19
1.3.2. Задачи	21
2. Лагранжев формализм	25
2.1. Функция Лагранжа. Уравнение Лагранжа	25
2.1.1. Теория	25
2.1.2. Задачи	27
2.2. Движение в неинерциальной системе отсчета	29
2.2.1. Теория	29
2.2.2. Задачи	29
2.3. Движение заряженных частиц	31
2.3.1. Теория	31
2.3.2. Задачи	32
2.4. Уравнения движения твердого тела	33
2.4.1. Теория	33
2.4.2. Задачи	35
3. Малые колебания и волны	39
3.1. Системы с одной степенью свободы	39
3.2. Колебания с несколькими степенями свободы	40
3.3. Задачи	41
4. Формализм Гамильтона	48
4.1. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона	48
4.1.1. Теория	48
4.1.2. Задачи	49
4.2. Уравнение Гамильтона–Якоби	53
4.2.1. Теория	53
4.2.2. Задачи	54
4.3. Адиабатические инварианты	58
4.3.1. Теория	58
4.3.2. Задачи	59

5. Основы механики сплошной среды	63
5.1. Идеальная среда. Уравнения гидродинамики	64
5.1.1. Теория	64
5.1.2. Задачи	69
5.2. Волны в идеальной жидкости	73
5.2.1. Теория	73
5.2.2. Задачи	75
5.3. Диссипативная среда	79
5.3.1. Теория	79
5.3.2. Задачи	81
5.4. Понятие о турбулентности	85
6. Представление о плазме и ее свойствах	87
6.1. Особенности движения заряженной жидкости	87
6.2. Уравнения магнитной гидродинамики	89
6.3. Задачи на уравнения МГД	90
6.4. Линейные волны в МГД-жидкости	91
6.5. Задачи на волны в МГД-жидкости	93
7. Метрика криволинейных систем координат	95
7.1. Метрический тензор	95
7.2. Ковариантное дифференцирование	96
7.3. Дифференциальные операторы	98
7.4. Задачи	100
Список литературы	102

К читателю

Теоретическая механика (иногда говорят об аналитической или классической механике) изучает простейшие формы движения материи, связанные с перемещением материальных объектов в пространстве с течением времени. Под материальными телами понимают:

- **материальные точки**, когда размеры тел малы по сравнению с характерными размерами систем, относительно которых рассматривается движение;
- **твердые тела** конечных размеров, для которых относительное расстояние между отдельными точками материального тела при его движении остается неизменным и можно считать, что тело недеформируемо;
- **упругие, жидкие или газообразные тела** (рассматривают в случае, когда тело деформируемо и размерами тела пренебречь в условиях задачи нельзя).

В соответствии с этим курс подразделяется на: *механику материальных точек, механику твердого тела, механику сплошных сред*. Данное пособие включает сборник задач. Каждая тема предваряется кратким изложением теории, приводятся определения необходимых физических величин, даны, как правило, без подробного вывода, основные уравнения, необходимые для решения задач.

Помимо оригинальных задач, в пособие включены задачи из известных сборников [13, 19, 32, 39].

*Александр Валентинович Хоперсков
Сергей Сергеевич Храпов*

Глава 1

Уравнения движения и их интегрирование

Второй закон Ньютона

$$\frac{d^2(m\vec{r})}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.1)$$

совместно с начальными условиями в момент времени t_0

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0} \equiv \dot{\vec{r}}(t = t_0) = \vec{v}_0, \quad \vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$$

определяет закон движения частицы массы m , местоположение которой в любой момент времени задает радиус-вектор (рис. 1.1)

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z.$$

Во многих случаях силу $\vec{F}(\vec{r})$ можно представить в виде градиента от скалярной функции $U(\vec{r})$, которая называется потенциальной энергией (потенциалом, часто говорят “поле”), и по определению имеем:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U. \quad (1.2)$$

Для консервативных систем выполняется закон сохранения энергии

$$T + U = E, \quad (1.3)$$

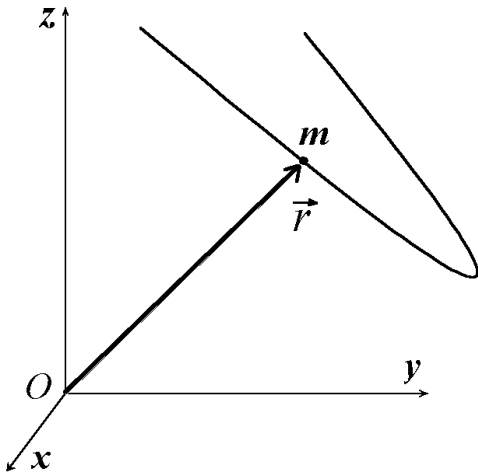


Рис. 1.1. Закон движения материальной точки определяется функцией $\vec{r}(t)$. Траекторией движения называется кривая в пространстве, которую описывает конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$. При решении любой задачи по механике следует начинать с выбора системы отсчета (системы координат и начального момента времени).

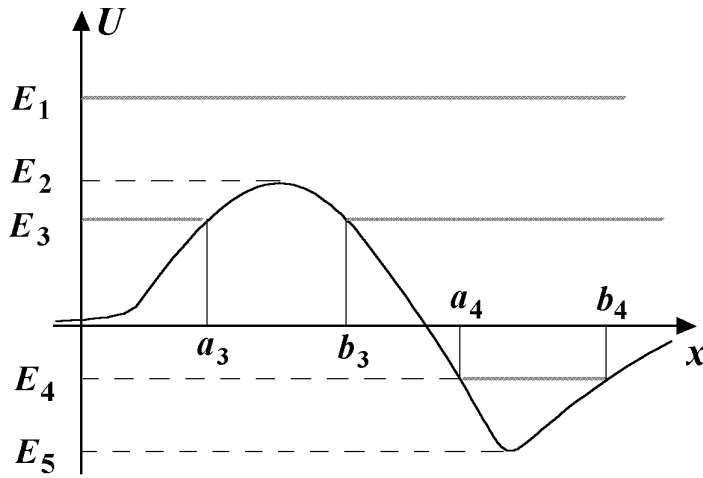


Рис. 1.2. Особенности одномерного движения при различных значениях полной энергии E при заданном $U(x)$. При $E > E_2$ частица может находиться в любой точке. Для $0 < E = E_3 < E_2$ движение остается инфинитным (частица может уйти на бесконечность), однако появляются две точки поворота a_3 и b_3 , и область $a_3 < x < b_3$ недоступна для частицы с энергией E_3 . Если энергия частицы ограничена $E_5 < E < 0$, то движение finito и разрешенная область движения ограничена точками поворота a_4, b_4 . Частица не может иметь энергию $E < E_5$.

где $T = m\dot{r}^2/2$ — кинетическая энергия, E — полная механическая энергия частицы.

1.1. Одномерное движение

1.1.1. Теория

Второй закон Ньютона (1.1) в случае одномерного движения при постоянной массе $m = \text{const}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \quad (1.4)$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка в случае заданной правой части $F(x, t)$. Закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \quad (1.5)$$

в случае известной потенциальной энергии часто с меньшими затратами приводит к определению закона движения $x(t)$, чем (1.4). После интегрирования (1.5) получаем

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (1.6)$$

Из выражения (1.6) с учетом заданных начальных условий находим обратную функцию $x(t)$, которая полностью определяет движение частицы.

Точки, в которых скорость движения \dot{x} обращается в нуль, называются *точками поворота* (рис.1.2). Точки поворота определяются из уравнения

$$U(x) - E = 0. \quad (1.7)$$

При наличии двух конечных точек поворота a и b движение в области $a \leq x \leq b$ называется финитным, если $U(x) \leq E$. В результате имеем периодическое движение с периодом

$$\tau = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (1.8)$$

1.1.2. Задачи

1. Определить закон движения частицы в поле $U(x) = kx^2/2$.
Ответ: $x(t) = \sqrt{2E/k} \sin \left\{ \pm \left[\sqrt{k/m} (t - t_0) \right] + \varphi \right\}$, где $\varphi = \arcsin \left(x_0 / \sqrt{2E/k} \right)$.

2. Определить закон движения частицы в потенциале Морза $U(x) = A \cdot \{ \exp(-2\alpha x) - 2 \exp(-\alpha x) \}$. Определить максимальную скорость движения. Нарисовать зависимости $x(t)$.

Ответ: $v_{max} = \sqrt{2(E + A)/m}$;

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{A - \sqrt{A(A - |E|)} \cos(\alpha t \sqrt{2|E|/m} + C)}{|E|} \right\}, \quad E < 0;$$

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{A - \sqrt{A(A + E)} \cosh(\alpha t \sqrt{2E/m} + C)}{E} \right\}, \quad E > 0;$$

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{m + 2A\alpha^2(t + C)^2}{2m} \right\}, \quad E = 0.$$

3. Определить период обращения в потенциале $U(x) = \alpha|x|$, энергия частицы равна E . *Ответ:* $\tau = 4\sqrt{2mE}/\alpha$.

4. Имеется сквозной колодец, проходящий через центр Земли (рис. 1.3a). Определить период колебаний и максимальную скорость тела, брошенного в такой колодец, без учета сил трения. Параметры Земли: $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R = 6400$ км. Считать, что Земля является однородным шаром. *Ответ:* $\tau = 2\pi\sqrt{R^3/GM} \approx 84,8$ мин,

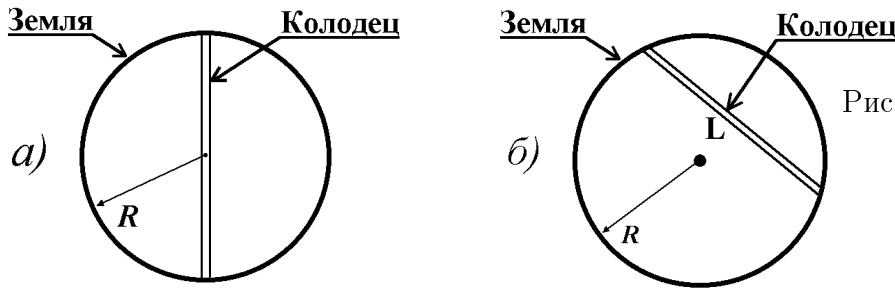


Рис. 1.3. К задачам 4, 5

где $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ — гравитационная постоянная;
 $v_{max} = \sqrt{GM/R} \approx 7,91 \text{ км/с}$.

5. Имеется колодец в Земле длиной L (рис. 1.3б). Определить период колебаний и максимальную скорость тела, брошенного в такой колодец. Рассмотреть предельный случай $L = 2R$ и сравнить с решением предыдущей задачи, в рамках модели однородной Земли. *Ответ:*
 $\tau = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$; $v_{max} = \frac{L}{2R} \sqrt{GM/R} \approx \frac{L}{2R} 7,91 \text{ км/с}$.

6. Определить приближенный закон движения частицы массы m в поле $U(x)$ вблизи точки остановки $x = a$ при следующих условиях:
 а) $U'(a) = 0$, $U''(a) \neq 0$; б) $U'(a) = 0$, $U''(a) = 0$, $U'''(a) \neq 0$; в) $U^{(i)}(a) = 0$ ($i = 1, \dots, n - 1$), $U^{(n)}(a) \neq 0$. *Ответ:*

$$а) x(t) = a + (x_0 - a) \exp \left\{ \pm t \sqrt{-U''(a)/m} \right\};$$

$$б) x(t) = a + \text{sign}[U'''(a)] \left\{ t \sqrt{|U'''(a)|/12m} + |x_0 - a|^{-1/2} \right\}^{-2};$$

$$в) x(t) = \begin{cases} a + \left\{ \mp \beta t \sqrt{-U^{(n)}(a)/mn!} + (x_0 - a)^{-\beta} \right\}^{-1/\beta}, & (n - \text{четные}) \\ a + \left\{ \beta t \sqrt{|U^{(n)}(a)|/mn!} + |x_0 - a|^{-\beta} \right\}^{-1/\beta}, & (n - \text{нечетные}) \end{cases},$$

здесь $\beta = (n - 2)/n$.

7. Частица массы m может двигаться по окружности радиуса R в вертикальной плоскости в поле тяжести. Найти закон движения, если ее кинетическая энергия в нижней точке равна $E = 2mgR$.

Ответ: $\varphi(t) = -\pi + 4 \arctg \left[\exp \left\{ \pm t \sqrt{g/R} \right\} \text{tg} \frac{\varphi(0) + \pi}{4} \right]$.

8. Определить изменение закона движения $x_0(t)$ частицы на участке, не содержащем точек остановки, вызванное добавлением к полю

$U(x)$ малой добавки $\delta U(x)$. Исследовать применимость полученных результатов вблизи точки остановки. *Ответ:*

$$x(t) = x_0(t) - \dot{x}_0(t) \delta t(x_0(t)), \text{ где } \delta t(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{\delta U(x) dx}{[E - U(x)]^{3/2}};$$

$$|\delta U'(x_1)| \ll |U'(x_1)|, \text{ где } x_1 \text{ — точка остановки.}$$

9. Найти изменение закона движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ малой добавки: а) $\delta U = m\alpha x^3/3$; б) $\delta U = m\beta x^4/4$. Получить ограничения на параметры задачи, при которых справедливо полученное решение. *Ответ:*

$$а) \delta x(t) = \frac{\varepsilon a}{3} (2 \cos \omega t - \cos^2 \omega t - 1), \left| \frac{\delta U}{U} \right| \leq \varepsilon = \frac{\alpha a}{\omega^2} \ll 1,$$

где a — точка поворота;

$$б) \delta x(t) = \frac{\varepsilon a}{8} (12\omega t \cos \omega t - 7 \sin \omega t - \sin 3\omega t), \frac{\beta a^2}{4\omega^2} \ll 1, a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}.$$

10. Определить период колебаний математического маятника при малых, но конечных значениях максимальной амплитуды φ_0 .

$$\text{Ответ: } \tau = 2\pi \sqrt{l/g} (1 + \varphi_0^2/16).$$

11. Частица массы m находится в поле $U(x) = -\alpha/x$. В начальный момент времени частица имеет координату $x = R$ и ее скорость равна нулю. За какое время частица пройдет расстояние R ? Пользуясь полученным результатом, ответить на вопрос: за какое время Земля упадет на Солнце, если относительное движение Земли и Солнца исчезнет? *Ответ:* $t = \pi \sqrt{mR^3/8\alpha}$; $t \simeq 64,5$ суток.

12. Определить период и закон движения частицы в поле $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(\alpha x)$, энергия частицы равна E . *Ответ:*

$$\tau = \pi \frac{\sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{E + U_0}}; x(t) = \frac{1}{\alpha} \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{E}{E + U_0}} \sin \left(\alpha t \sqrt{\frac{2(E + U_0)}{m}} + C \right) \right\}.$$

13. Частица движется в поле $U(x) = U_0/\operatorname{ch}^2(\alpha x)$ с энергией $E > U_0$. Найти время задержки частицы при движении от $x = -\infty$ до

$x = +\infty$ по сравнению со временем свободного движения с той же энергией. *Ответ:*

$$\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right) dx = \frac{1}{\alpha v_0} \ln \frac{E}{E - U_0},$$

где $v_0 = \sqrt{2E/m}$, $v(x) = \sqrt{2[E - U(x)]/m}$.

14. Определить время падения частицы на Землю с высоты H для двух случаев: а) пренебречь зависимостью силы тяжести g от высоты, б) учесть зависимость силы тяжести g от высоты. Сравнить результаты. *Ответ:*

$$а) t = \sqrt{\frac{2H}{g}}; \quad б) t = \sqrt{\frac{R+H}{2gR^2}} \left\{ \sqrt{RH} + (R+H) \arcsin \sqrt{\frac{H}{R+H}} \right\},$$

если $H \ll R$ (R — радиус Земли), то в пределе имеем $t \simeq \sqrt{2H/g}$.

15. Тело массой m движется в потенциале $U(x) = A(\alpha x^2 - x^3)$. В начальный момент времени координата точки x_0 , а скорость v_0 . Исследовать характер движения (найти точки остановки, области, в которые тело не может попасть, максимальную скорость движения).
16. Для потенциала $U(x) = Ax^2/(a^2 + x^2)$ ответить на вопросы, сформулированные в зад. 15.
17. Определить закон движения частицы в поле $U(x) = -U_0/\text{ch}^2(\alpha x)$. *Ответ:*

$$x(t) = \pm \frac{1}{\alpha} \text{Arsh} \left\{ \alpha t \sqrt{2U_0/m} + C \right\}, \quad E = 0;$$

$$x(t) = \pm \frac{1}{\alpha} \text{Arsh} \left\{ \sqrt{(E + U_0)/E} \text{sh} \left(\alpha t \sqrt{2E/m} + C \right) \right\}, \quad E > 0;$$

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \text{Arsh} \left\{ \sqrt{(|E| + U_0)/|E|} \sin \left(\alpha t \sqrt{2E/m} + C \right) \right\}, \quad E < 0.$$

18. Оценить изменение периода движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ малой добавки: а) $\delta U = m\alpha x^3/3$; б) $\delta U = m\beta x^4/4$. *Указание:* воспользоваться формулой $\delta\tau = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta U(x) dx}{\sqrt{E - U(x)}} = -\frac{\partial}{\partial E} (\tau \langle \delta U \rangle)$, где $\langle \delta U \rangle =$

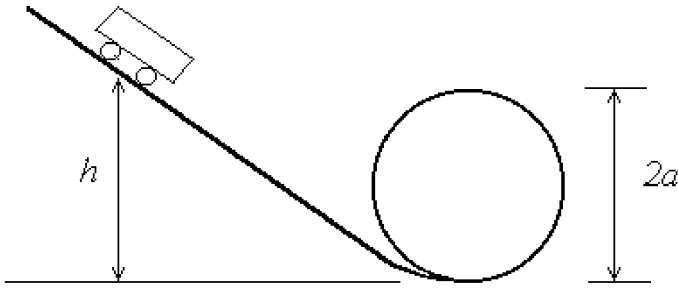


Рис. 1.4. К задаче 21.

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \delta U(x(t)) dt. \text{ Ответ: а) } \delta\tau = \frac{5\pi E}{18\omega U_m}, \text{ при } E \ll U_m = \frac{m\omega^6}{6\alpha^2}$$

$$\text{б) } \delta\tau = -\frac{3\pi\beta E}{2m\omega^5}.$$

19. Найти изменение периода движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x) = A \{ \exp(-2\alpha x) - 2 \exp(-\alpha x) \}$ малой добавки $\delta U = -V \exp(\alpha x)$ ($V \ll A$). Ответ:

$$\delta\tau = \frac{3\pi AV \sqrt{m}}{2\alpha |E|^{5/2} \sqrt{2}}, \text{ при } |E| \gg U_m \simeq \sqrt{8AV}, E < 0.$$

20. Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массы m в поле с потенциальной энергией $U(x) = A|x|^n$. Почему при $n = 2$ период не зависит от полной энергии E . Ответ: $\tau = \frac{2\sqrt{2\pi m} \Gamma(1/n)}{nA^{1/n} \Gamma(1/n + 1/2)} E^{(2-n)/2n}$, где $\Gamma(k)$ — Гамма-функция (сравнить с зад. 3 при $n = 1$).

21. Вагонетка (ее масса m) скатывается по наклонной поверхности (рис. 1.4). С какой высоты h нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность без отрыва от поверхности? Определить давление вагонетки на поверхность кольцевого участка пути.

22. Имеется сквозной колодец, проходящий через центр Земли (см. рис. 1.3а). Определить период колебаний и максимальную скорость тела, брошенного в такой колодец. Параметры Земли: $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R = 6400$ км, распределение плотности $\rho(r) = \rho(0) \left(1 - \frac{\rho(0) - \rho(R)}{\rho(0)} \frac{r^2}{R^2} \right)$, среднее значение плотности на поверхности Земли $\rho(R) \simeq 2.2 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.2. Движение в центральном поле

1.2.1. Теория

У центрального поля поверхности равного уровня являются сферами и потенциальная энергия зависит только от расстояния до центра поля $U(r)$. Траектория движения частицы в центральном поле лежит в плоскости и помимо закона сохранения энергии выполняется закон сохранения момента импульса

$$\vec{L} \equiv [\vec{r}\vec{p}] = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z, \quad (1.9)$$

где (r, φ, z) — координаты в цилиндрической системе координат.

Закон сохранения энергии принимает вид

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r), \quad (1.10)$$

где эффективный потенциал U_{eff} есть известная функция радиальной координаты

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (1.11)$$

Здесь $L \equiv L_z$ — z -компонента момента импульса, определяемая соотношением (1.9).

Поскольку движение происходит в плоскости, то две функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ однозначно дают местоположение частицы. Первая определяется из

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}, \quad (1.12)$$

а вторая из

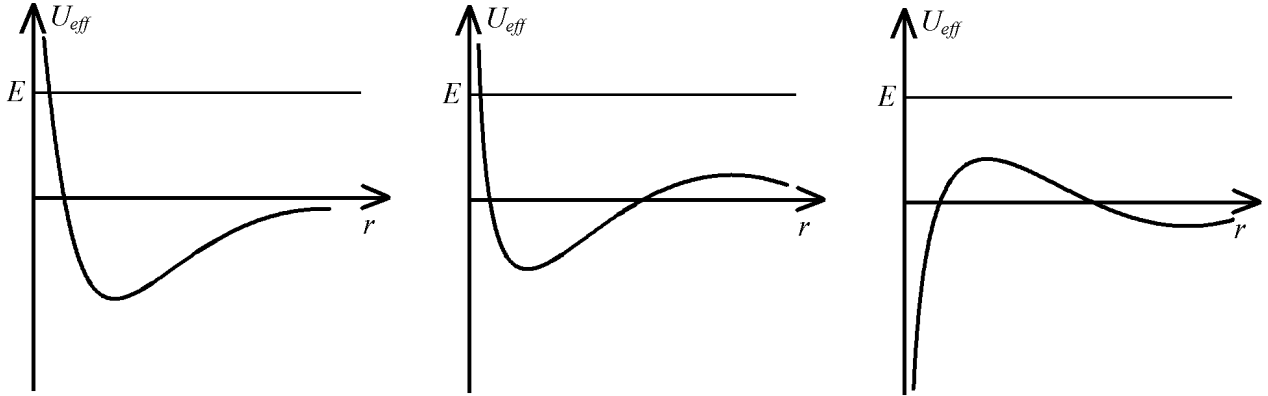
$$\varphi(t) - \varphi_0 = \frac{L}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)}. \quad (1.13)$$

Пусть в некоторый момент времени частица имеет координаты (r_0, φ_0) , тогда траектория движения в центральном поле определяется из

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}}. \quad (1.14)$$

Во многих случаях траекторию движения оказывается проще определить из дифференциального уравнения на функцию $w(\varphi) = 1/r(\varphi)$:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = -\frac{m}{L^2} \frac{dU}{dw}. \quad (1.15)$$

Рис. 1.5. Радиальные распределения $U_{eff}(r)$

В частном (но очень важном) случае Ньютоновского потенциала

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (1.16)$$

траектории движения для $\alpha > 0$ определяются уравнением

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi, \quad (1.17)$$

где $p = \frac{L^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$ — эксцентриситет. В зависимости от значения e имеем движение по: 1) эллипсу, $e < 1$ (случай $e = 0$ соответствует окружности); 2) параболе ($e = 1$); 3) гиперболе ($e > 1$).

При $\alpha < 0$ в (1.16) получаем из (1.15):

$$\frac{p}{r} = e \cos \varphi - 1. \quad (1.18)$$

В этом случае движение возможно только по параболе или гиперболе ($e \geq 1$).

1.2.2. Задачи

1. Нарисуйте для трех заданных $U_{eff}(r)$ зависимость $\dot{r}(r)$ для частицы с положительной энергией E (рис. 1.5). Проанализируйте как изменится фазовый портрет при уменьшении E .
2. Частица движется в поле $U(r) = -\alpha/r^6$. Найти и изобразить траекторию движения, если полная энергия частицы равна нулю.

Ответ: $r^2 = \sqrt{2m\alpha/L^2} \sin(2\varphi)$.

3. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

Ответ: $r = \frac{p}{e \cos[\gamma(\varphi - \varphi_0)] - 1}$, $E > 0$, где $p = \frac{2}{\alpha} \left(\beta + \frac{L^2}{2m} \right)$,
 $e = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{\alpha}}$, $\gamma = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}$.

4. Рассчитать траекторию частицы в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр с расстояния r . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица. Ответ:

а) в случае $\beta < L^2/2m$ движение инфинитное:

$$r = \frac{p}{e \cos[\gamma(\varphi - \varphi_0)] - 1}, \quad E > 0,$$

где $p = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{L^2}{2m} - \beta \right)$, $e = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{\alpha}}$, $\gamma = \sqrt{1 - \frac{2m\beta}{L^2}}$;

б) для случая $\beta > L^2/2m$ имеем:

$$r = \frac{p'}{e' \operatorname{sh}[\gamma'(\varphi - \varphi_0)] + 1}, \quad E > U_{max},$$

$$r = \frac{p'}{1 \pm e'' \operatorname{ch}[\gamma'(\varphi - \varphi_0)]}, \quad E < U_{max},$$

$$r = \frac{p'}{1 \pm \exp[-\gamma'(\varphi - \varphi_0)]} \text{ или } r = p', \quad E = U_{max},$$

где $p' = \frac{2}{\alpha} \left(\beta - \frac{L^2}{2m} \right)$, $e' = \sqrt{\frac{2Ep}{\alpha} - 1}$, $\gamma' = \sqrt{\frac{2m\beta}{L^2} - 1}$, $e'' = \sqrt{1 - \frac{2Ep}{\alpha}}$, $U_{max} = \frac{\alpha^2}{4(\beta - L^2/2m)}$;

в) для случая $\beta = L^2/2m$: $r = \frac{\alpha/E}{1 - m\alpha^2(\varphi - \varphi_0)^2/2L^2E}$.

5. При каких значениях момента импульса L возможно финитное движение частицы в поле а) $U(r) = -\alpha \exp(-r/r_D)/r$; б) $U(r) = -V \exp(-r^2/r_D^2)$? Ответ:

$$а) L^2 < (2 + \sqrt{5}) \exp\left\{-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\} \alpha m r_D; \quad б) L^2 < \frac{8mVr_D^2}{E^2}.$$

6. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя последовательными прохождениями перигелия (точки $r = r_{min}$), период радиальных колебаний τ_r и период обращения τ_φ . При каких условиях траектория будет замкнутой? *Ответ:*

$$r = \frac{p}{e \cos[\gamma(\varphi - \varphi_0)] + 1} \quad (p, e, \gamma \text{ определены в задаче 3.});$$

$$\tau_r = \frac{\pi\alpha\sqrt{m}}{(2|E|)^{3/2}}, \quad \tau_\varphi = \gamma\tau_r, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma}.$$

7. Определить массу Солнца M , имея следующие данные: радиус Земли $R = 6370$ км, средняя плотность ее 5.5 г/см³; большая полуось земной орбиты $a = 149$ млн. км, время обращения вокруг Солнца $\tau = 365.25$ суток. Силу всемирного тяготения между двумя массами, равными 1 г, на расстоянии 1 см считаем равной gR^2/m , где m — масса Земли, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли; из законов Кеплера¹ следует, что сила притяжения Земли Солнцем равна $4\pi^2 a^2 m / (\tau^2 r^2)$, где r — расстояние Земли от Солнца. *Ответ:* $1,97 \cdot 10^{33}$ г.

8. Точка с массой m , подверженная действию центральной силы F , описывает лемнискату: $r^2 = a \cos(2\varphi)$, где a — величина постоянная, r — расстояние точки от центра поля; в начальный момент $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с центром поля. Найти центральный потенциал $U(r)$. *Ответ:* $U = -\frac{L^2 a^2}{2mr^6} = -\frac{ma^2}{2r^6} r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha$.

9. Показать, что потенциальная энергия системы Земля — Луна в поле Солнца, усредненная за месяц, имеет вид $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3}$ (r — расстояние от центра масс системы Земля — Луна до Солнца; принять для простоты, что плоскость орбиты Луны совпадает с плоскостью

¹Кеплер Иоганн (1571–1630) — великий астроном и математик, один из основателей современной науки. Автор законов движения тел в точечном гравитационном поле (законы Кеплера, 1609): 1) Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце. 2) Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, за равные промежутки времени описывает равные площади. 3) Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит (1619 г.). Кеплеру принадлежат теория зрения (объяснены близорукость и дальновзоркость), правила расчетов линз, идея о существовании полного внутреннего отражения.

орбиты Земли; m_1 — масса Земли, m_2 — масса Луны). Определить происходящее из-за второго слагаемого смещение перигелия за сто лет. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, расстояние до Луны $a = 380$ тыс. км, среднее расстояние до Солнца 150 млн. км. *Ответ:*

$$\delta\varphi = \frac{6\pi\beta}{\alpha r^2} = \frac{3\pi}{2} \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \times 100 = 7,7''.$$

10. Получить выражения для декартовых компонент L_x , L_y , L_z и абсолютной величины момента импульса частицы $|\vec{L}|$ в: а) цилиндрических координатах r , φ , z ; б) сферических координатах r , θ , φ . *Ответ:*

$$\text{а) } \begin{cases} L_x = m \sin \varphi (r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi} \cos \varphi \\ L_y = m \cos \varphi (z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi} \sin \varphi \\ L_z = mr^2\dot{\varphi} \\ L^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} L_x = -mr^2(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi) \\ L_y = mr^2(\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi) \\ L_z = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ L^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \end{cases} .$$

11. Определить центральные поля, в которых частица может двигаться по следующим траекториям ($c = \text{const}$): а) $r = c\varphi$; б) $r = c/\varphi$; в) $r = c \cdot \exp(-\varphi)$. Изобразите траектории движения. *Ответ:*

$$\text{а) } U = -\frac{L^2}{2m} \left(\frac{c^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right); \quad \text{б) } U = -\frac{L^2}{2mr^2}; \quad \text{в) } U = -\frac{L^2}{mr^2}.$$

12. Найти и нарисовать траекторию движения частицы в центральном поле: $U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$. *Ответ:*

$$r = \begin{cases} L / [\sqrt{2m(E + U_0)} \cos(\varphi + c)], & r < r_0 \\ L / [\sqrt{2mE} \cos(\varphi + c)], & r > r_0 \end{cases} .$$

13. Артиллерийский снаряд имеет начальную скорость v_0 под углом β к горизонту Земли. Найти дальность и время полета. Считать, что Земля является сферической, вращением Земли и атмосферой пренебречь. При каких значениях v_0 и β тело окажется в диаметрально противоположной точке на поверхности Земли?

Ответ: $s = 2R \arccos [(1 - p/R)/e]$, где $e^2 = 1 - (2 - k) \cos^2 \beta$,
 $p = kR \cos^2 \beta$, $k = v_0^2/gR$;

$$t = \frac{2p^2}{1 - e^2} \sqrt{\frac{1}{GMp}} \left\{ \frac{e \sin \varphi_0}{1 + e \cos \varphi_0} - \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \varphi_0 \right\},$$

где $\varphi_0 = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{p - R}{eR} \right)$; при $v_0 = \sqrt{gR}$ и $\beta = (0, \pi)$ имеем
 $s = \pi R$.

14. Точечное тело находится в начальный момент времени на поверхности Земли, его начальная скорость равна v_0 . При каком значении угла β между начальной скоростью и касательной к Земле дальность полета максимальна при условии, что тело упадет на Землю. Вращение планеты не учитывать. Ответ: $\beta = \arccos \sqrt{Rg/(2Rg - v_0^2)}$, где $g = GM/R^2$ — ускорение силы тяжести (при $v_0 \ll \sqrt{Rg} \rightarrow \beta \simeq \pi/4$).

15. Определить максимальную и минимальную скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца. Чему равна средняя скорость движения Земли по орбите? Ответ:

$$v_{max} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{\tau_{\oplus}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} = 30,3 \text{ км/с}, \quad v_{min} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{\tau_{\oplus}} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = 29,3 \text{ км/с},$$

$$v_{ср} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{\tau_{\oplus} \sqrt{1 - e^2}} = 29,8 \text{ км/с}.$$

16. Запишите второй закон Ньютона $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ для а) цилиндрической системы координат (r, φ, z) и б) сферической системы координат (r, θ, φ) . Ответ:

$$а) \begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + F_r \\ mr\ddot{\varphi} = -2m\dot{r}\dot{\varphi} + F_{\varphi} ; \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + F_r \\ mr\ddot{\theta} = mr \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - 2m\dot{r}\dot{\theta} + F_{\theta} \\ mr\ddot{\varphi} = F_{\varphi}/(\sin^2 \theta) - 2m\dot{r}\dot{\varphi} - 2mr\dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \theta \end{cases},$$

где $F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$, $F_{\varphi} = -\frac{\partial U}{r\partial \varphi}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$, $F_{\theta} = -\frac{\partial U}{r\partial \theta}$.

17. В поле тяготения Солнца движется комета с периодом обращения τ . В перигелии расстояние от Солнца до кометы равно r_p . Найти расстояние от Солнца до афелия орбиты кометы, зная период обращения Земли τ_0 вокруг Солнца и значение большой полуоси орбиты Земли a_0 . *Ответ:* $2a_0 (\tau/\tau_0)^{2\beta} - r_p$.
18. Известны параметр p и эксцентриситет e орбиты тела, движущегося в поле тяжести Земли. Найти его скорость как функцию расстояния r от центра Земли. Нарисовать график $v(r)$. *Ответ:*

$$v(r) = \sqrt{GM [1 + e^2 + 2(p/r - 1)]/p}.$$

19. На какой высоте нужно запустить спутник Земли, обращающийся в плоскости экватора, для того, чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом Земли? *Ответ:* $H = 35\,800$ км.
20. Определить, при какой высоте H круговой орбиты спутника его потенциальная энергия относительно поверхности планеты радиуса R равна его кинетической энергии. *Ответ:* $H = R/2$.
21. Ракета двигается по прямой в отсутствии внешних сил. В начальный момент времени ее масса составляет m_0 . Скорость истечения вещества w из ракеты неизменна. Какова скорость ракеты в момент времени, когда масса составит m ? *Ответ:* $v = w \cdot \ln \frac{m_0}{m}$ (формула Циолковского²).

1.3. Рассеяние частиц

1.3.1. Теория

При пролете частицы мимо центра поля $U(r)$ происходит отклонение траектории на угол $\chi = |\pi - 2\varphi|$ (χ — угол рассеяния, рис. 1.6), угол φ определяется выражением

$$\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2 - U(r)/E}}, \quad (1.19)$$

²ЦИОЛКОВСКИЙ Константин Эдуардович (1857–1935) — один из пионеров теоретических и экспериментальных исследований в области воздухоплавания и космонавтики, построил первую в России аэродинамическую трубу (1897 г), исследовал уравнения движения ракеты (1903 г).

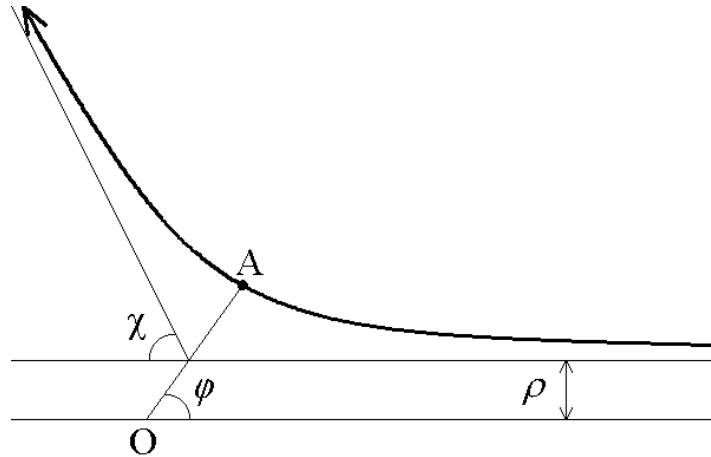


Рис. 1.6. Рассеяние в центральном поле. Центр поля находится в точке O . На большом расстоянии от O скорость частицы v_∞ , $r_{min} = |OA|$.

где ρ — прицельный параметр и выполняются соотношения $E = mv_\infty^2/2$, $L = m\rho v_\infty$.

По определению *дифференциальное сечение* рассеяния есть:

$$d\sigma = dN/n, \quad (1.20)$$

где n — число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения однородного пучка, dN — число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между χ и $\chi + d\chi$. Формулу (1.20) можно переписать в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad (1.21)$$

или

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \quad (1.22)$$

Функция $\rho(\chi)$ определяется (1.19).

Полное сечение рассеяния получаем в результате интегрирования (1.22) по χ в пределах от 0 до π

$$\sigma = \int_0^\pi 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \quad (1.23)$$

Сечение падения частиц определяется формулой

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi\rho_{\text{max}}^2, \quad (1.24)$$

где ρ_{max} — максимальное значение прицельного параметра при котором происходит падение. При $\rho \leq \rho_{\text{max}}$ частицы падают в центр поля или

пересекают поверхность сферы заданного радиуса R . В случае падения частиц на поверхность сферы радиуса R максимальное прицельное расстояние ρ_{max} определяется из условия $U(R) + \frac{E\rho_{max}^2}{R^2} = E$.

Для кулоновского поля дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой Резерфорда³

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\cos(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)}. \quad (1.25)$$

1.3.2. Задачи

1. Найти сечение падения электрона на положительно заряженную (заряд $+Q$) сферу радиуса R . *Ответ:*

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi R^2 \left[1 + \frac{kQe}{ER} \right], \quad \text{где } E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

2. Найти сечение падения электрона на отрицательно заряженную (заряд $-Q$) сферу радиуса R . *Ответ:*

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi R^2 \left[1 - \frac{kQe}{ER} \right], \quad \text{где } E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

3. Определить эффективное сечение падения частиц с массой m на поверхность сферического тела массы M и радиуса R , к которой они притягиваются по закону Ньютона. *Ответ:*

$$\sigma_{\text{пад}} = \pi R^2 \left[1 + \frac{GMm}{ER} \right], \quad \text{где } E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

4. Определить эффективное сечение падения частиц в центр поля:
 - а) $U(r) = -\alpha/r^2$; б) $U(r) = -\alpha/r^n$, ($n > 2$, $\alpha > 0$). *Ответ:*

$$\text{а) } \sigma_{\text{пад}} = \frac{2\pi R\alpha}{mv_{\infty}^2}, \quad \text{при } \alpha > \frac{mv_{\infty}^2\rho^2}{2};$$

$$\text{б) } \sigma_{\text{пад}} = \pi n(n-2)^{(2-n)/n} \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^{2/n}.$$

³РЕЗЕРФОРД Эрнест (1871–1937) — лауреат Нобелевской премии 1908 года, один из создателей атомной физики. Он является автором открытия закона радиоактивного распада; опытов по рассеянию α -частиц, приведших к планетарной модели атома; первой в мире ядерной реакции (превращение азота в кислород); открытия протона (1919 г) в ходе осуществления ядерной реакции ${}^1_7\text{N} + {}^4_2\alpha \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{p}$; предсказал существование нейтрона. Среди его учеников Нобелевские лауреаты Д.Чедвиг, П.Капица, Г.Гейгер, Н.Бор.

5. Найти сечение падения частиц в центр поля: а) $U(r) = \alpha/r - \beta/r^2$; б) $U(r) = \beta/r^2 - \gamma/r^4$. Ответ:

$$а) \sigma = \begin{cases} \pi \left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right), & E > \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\ 0, & E < \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{cases}; \quad б) \sigma = \begin{cases} \pi \left(2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E} \right), & E > \frac{\beta^2}{4\gamma} \\ 0, & E < \frac{\beta^2}{4\gamma} \end{cases}.$$

6. Найти сечение падения частиц на сферу радиусом R , центр которой совпадает с центром поля: а) $U(r) = -\alpha/r^n$, $n \geq 2$; б) $U(r) = \beta/r^2 - \gamma/r^4$. Ответ:

$$а) \sigma = \begin{cases} \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{ER^2} \right), & R > r_0 \\ \frac{\pi n}{n-2} \left[\frac{\alpha(n-2)}{2E} \right]^{2/n}, & R < r_0 \end{cases}, \quad \text{где } r_0 = (n-2)^{1/n} \left(\frac{2E}{\alpha} \right)^{1/n};$$

$$б) \sigma = \begin{cases} \pi \left(2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E} \right), & \text{если } 2\sqrt{\gamma E} > \beta, ER^2 < \beta \\ \pi R^2 \left(1 + \frac{\gamma}{ER^4} - \frac{\beta}{ER^2} \right), & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

7. Найти дифференциальное сечение рассеяния в поле $U(r) = \alpha/r^2$.

Ответ: $d\sigma = \frac{2\pi^3\alpha}{E} \frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} d\chi$.

8. Найти дифференциальное сечение рассеяния сферической “потенциальной ямой” $U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$. Ответ:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2 n^2 \left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1 \right) \left(n - \cos \frac{\chi}{2} \right)}{2 \cos \frac{\chi}{2} \left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2} - 1 \right)^2} \sin \chi d\chi,$$

где $n = \sqrt{1 + \frac{U_0}{E}}$, $0 < \chi < 2 \arccos \frac{1}{n}$.

9. Определить дифференциальное и полное сечения рассеяния частиц от абсолютно твердого шарика радиуса a (т.е. при законе взаимодействия $U = \infty$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$). Ответ: $d\sigma = \pi a^2 \sin \chi d\chi/2$, $\sigma = \pi a^2$.

10. Найти дифференциальное сечение рассеяния сферическим “потенциальным горбом”: $U(r) = \begin{cases} U_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$. Ответ:

$$d\sigma = \pi \left[\frac{a^2 n^2 \left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1 \right) \left(n - \cos \frac{\chi}{2} \right)}{2 \cos \frac{\chi}{2} \left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2} - 1 \right)^2} + \frac{a^2}{2} \right] \sin \chi d\chi, \quad E > U_0,$$

где $n = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}$, $0 < \chi < 2 \arccos n$, при $E < U_0$ см. зад. 9.

11. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси x , на гладкой упругой поверхности вращения $\rho(x)$: а) $\rho = b \sin(x/a)$, $0 \leq x \leq \pi a$; б) $\rho = Ax^n$, $0 < n < 1$; в) $\rho = b - a^2/x$, $a^2/b \leq x < \infty$. Ответ:

$$а) \quad d\sigma = \frac{\pi a^2 \sin \chi d\chi}{2 \cos^4(\chi/2)}, \quad \text{если } 0 < \chi < 2 \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2};$$

$$б) \quad d\sigma = A^{2/(1-n)} \left(n \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} \right)^{\frac{1+n}{1-n}} \frac{2\pi d\chi}{(1-n) \cos^2(\chi/2)};$$

$$в) \quad d\sigma = \frac{b}{2} \left(a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\chi}{2}} - b \right) \frac{\pi d\chi}{\sin^2(\chi/2)}, \quad \text{если } 0 < \chi < 2 \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2}.$$

12. Найти поверхность вращения, для которой сечение упругого рассеяния на которой совпадает с резерфордским. Ответ: $\rho = \sqrt{\alpha x/E}$ — параболоид вращения.

13. Электрон на бесконечности имеет скорость v_0 и прицельный параметр ρ относительно другого неподвижного электрона. Найти скорости электронов после рассеяния. Ответ:

$$v_1 = \frac{E\rho v_0}{\sqrt{\alpha^2 + E^2\rho^2}}, \quad v_2 = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{\alpha^2 + E^2\rho^2}}, \quad \text{где } E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

14. Найти дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле $U(r) = \begin{cases} \alpha(R-r)/(Rr), & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$. Ответ:

$$d\sigma = \frac{\pi R^2(1+\lambda) \sin \chi d\chi}{2 [1 + \lambda \sin^2(\chi/2)]^2}, \quad \text{где } \lambda = 4RE \frac{RE + \alpha}{\alpha^2}.$$

15. Найти дифференциальное сечение рассеяния быстрых частиц ($E \gg V$) в поле $U(r) = V \cdot \ln(1 + a^2/r^2)$. *Ответ:*

$$d\sigma = \frac{a^2 \chi_m^2 (\chi_m - \chi)}{\chi^3 (2\chi_m - \chi)^2}, \quad \text{при } \chi \leq \chi_m = \frac{\pi V}{E}.$$

16. Рассчитать дифференциальное сечение рассеяния электронов на малые углы в поле электрического диполя с моментом \vec{d} ($U = me \vec{r} \vec{d} / r^3$). *Ответ:* $d\sigma = \frac{2\pi e |\vec{d}_\perp| \sin \chi d\chi}{8E\chi^3}$, где \vec{d}_\perp — компонента \vec{d} , перпендикулярная к \vec{v}_∞ .

17. Найти дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на малые углы в поле магнитного монополя с зарядом g . *Ответ:*

$$d\sigma = \left(\frac{2eg}{mcv} \right)^2 \frac{2\pi \sin \chi d\chi}{\chi^4}.$$

18. Определить дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в поле $U(r) = \alpha/r^n$ ($n > 0$).

$$\text{Ответ: } d\sigma = \frac{1}{n} \left\{ \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right\}^{2/n} \chi^{2(n+1)/n} 2\pi \sin \chi d\chi.$$

19. Найти дифференциальное сечение рассеяния электронов на малые углы в поле магнитного диполя с моментом $\vec{\mu}$.

$$\text{Ответ: } d\sigma = \frac{e\mu}{mcv_\infty} \frac{\pi \sin \chi d\chi}{\chi^3}, \quad \text{при } \vec{\mu} \perp \vec{v}_\infty.$$

20. Нейтроны и протоны, налетающие на неподвижные ядра, вызывают ядерные реакции лишь при непосредственных столкновениях с ядрами. Допуская, что ядра представляют собой заряженные сферы одинакового радиуса R , вычислить сечения реакций, вызываемых протонами и нейтронами. *Ответ:*

$$\sigma_p = \begin{cases} \pi R^2 \left(1 - \frac{Ze^2}{RE_0} \right), & E_0 > \frac{Ze^2}{R} \\ 0, & E_0 < \frac{Ze^2}{R} \end{cases} \quad \text{— сечение реакции протонов,}$$

$\sigma_n = \pi R^2$ — сечение реакции нейтронов, Z — количество протонов в ядре, E_0 — кинетическая энергия налетающих частиц.

Глава 2

Лагранжев формализм

Формализм Лагранжа

1) Определяем число степеней свободы
2) Выбираем обобщенные координаты
3) Строим функцию Лагранжа
4) Записываем уравнения Лагранжа

2.1. Функция Лагранжа. Уравнение Лагранжа

2.1.1. Теория

Положение N материальных точек может быть описано не только системой радиус-векторов

$$\vec{r}_j = \vec{e}_x x_j + \vec{e}_y y_j + \vec{e}_z z_j, \quad (j = 1, \dots, N), \quad (2.1)$$

но и $K = 3N$ независимыми обобщенными координатами

$$q_i = q_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (i = 1, \dots, K). \quad (2.2)$$

Для функции Лагранжа¹

$$\mathcal{L} = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_K, q_1, \dots, q_K, t) - U(q_1, \dots, q_K, t) \quad (2.3)$$

справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, K), \quad (2.4)$$

где q_i — обобщенные координаты, K — число степеней свободы.

¹Жозеф Луи ЛАГРАНЖ (1736–1813) — сенатор, граф империи, командор ордена Почетного легиона, выполнил классические работы по математике, астрономии, механике. "Лагранж — величественная пирамида математических наук" (Б. Наполеон). В 16 лет стал преподавать математику в Артиллерийском училище в Турине. Научные результаты Лагранжа огромны: аналитическая механика, вариационное исчисление, теория вероятности, математические теории звука, задача о либрации Луны, задача о системе Юпитера, задача трех тел, исследование возмущений комет, решение алгебраических уравнений, теория аналитических функций, теория дифференциальных уравнений, математической картографии и гидромеханики.

Функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени

$$\mathcal{L}'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t),$$

т.е. уравнения движения для \mathcal{L}' и \mathcal{L} совпадают.

Обобщенная сила определяется соотношениями

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (2.5)$$

В практически важном случае однородных потенциалов, для которых $U(a\vec{r}_1, \dots, a\vec{r}_N) = a^N U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, справедлива *теорема вириала*:

$$\langle 2T \rangle = \langle NU \rangle, \quad (2.6)$$

где средние величины определяются выражением

$$\langle f \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(t') dt'. \quad (2.7)$$

Уравнение Лагранжа при наличии гироскопических сил. Можно обобщить рассмотренный выше подход для описания динамических систем на случай $U = U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, когда поле зависит от обобщенной скорости $\dot{q}_j = dq_j/dt$. Если ограничиться частным случаем

$$U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = U_0(\vec{q}, t) - \sum_{k=1}^K A_k(\vec{q}, t) \dot{q}_k, \quad (2.8)$$

то для обобщенной силы имеем

$$Q_i = -\frac{\partial U_0}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \dot{q}_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \right). \quad (2.9)$$

Для одной частицы в декартовой системе координат можно записать

$$\vec{Q} = \vec{F} = -\vec{\nabla} U_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + [\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}], \quad (2.10)$$

где \vec{A} называют векторным потенциалом.

Уравнения Лагранжа (2.4) в этом случае с учетом (2.9) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, K). \quad (2.11)$$

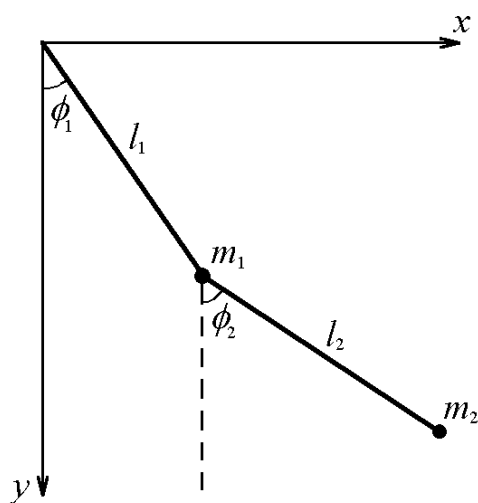


Рис. 2.1. Двойной математический маятник.

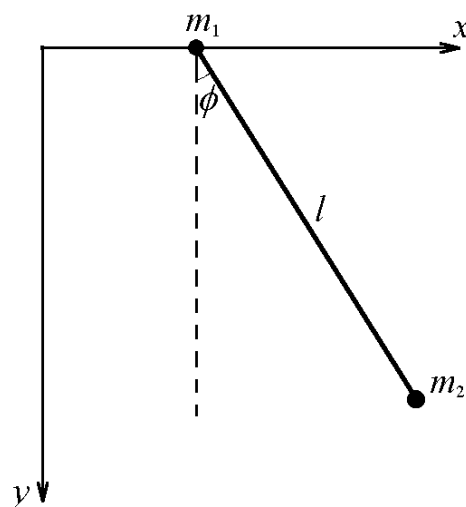
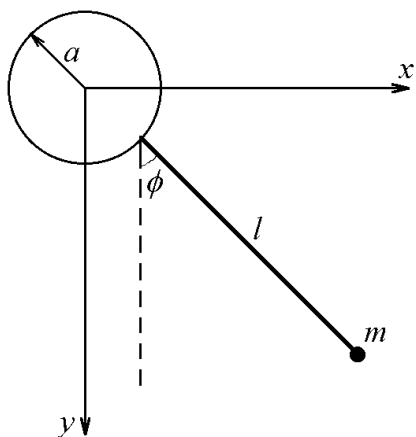
Рис. 2.2. Масса m_1 может без трения двигаться в горизонтальном направлении.

Рис. 2.3. К задаче 3.

2.1.2. Задачи

1. Найти функцию Лагранжа двойного плоского математического маятника (рис. 2.1), находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g).

Ответ:
$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

2. Найти функцию Лагранжа плоского маятника с массой m_2 , точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой (рис. 2.2). Ответ:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

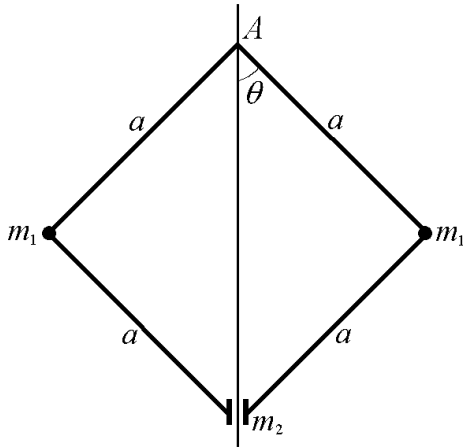


Рис. 2.4. К задаче 4.

3. Найти функцию Лагранжа плоского маятника, точка подвеса которого: а) равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой γ (рис. 2.3); б) совершает горизонтальные колебания по закону $a \cos \gamma t$; в) совершает вертикальные колебания по закону $a \cos \gamma t$. *Ответ:*

$$а) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + mgl \cos \varphi;$$

$$б) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi + mgl \cos \varphi;$$

$$в) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

4. Найти функцию Лагранжа системы, изображенной на рис. 2.4. Точка m_2 может двигаться вдоль вертикальной оси, а вся система вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг этой оси. *Ответ:*

$$\mathcal{L} = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2ga(m_1 + m_2) \cos \theta.$$

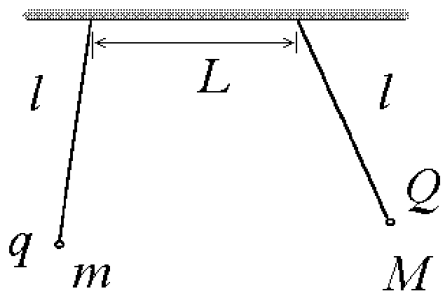


Рис. 2.5. К задаче 5.

5. Расстояние между точками подвеса двух математических маятников равно L (рис. 2.5). На массу m помещен заряд q , а на массу M — заряд Q . Записать уравнения движения.
6. Длина математического маятника, колеблющегося в однородном поле тяжести, изменяется по закону $L(t)$. Найти функцию Лагранжа и уравнение движения маятника.
7. Восстановить вид функции Лагранжа по известному закону одномерного движения материальной точки массы m : $x = \pm \sqrt{\frac{At^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0t)^2}$. Ответ: $\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{Am}{2x^2}$.
8. Точка подвеса математического маятника может двигаться по окружности радиуса R с угловой скоростью $\Omega(t)$. Найти функцию Лагранжа и уравнения движения маятника.
9. Частица массы m движется без трения в поле тяжести внутри гладкой чаши, форма дна которой $z = a(t)x^2 + b(t)y^2$. Найти функцию Лагранжа и написать уравнения движения.

2.2. Движение в неинерциальной системе отсчета

2.2.1. Теория

Уравнение движения в форме (1.1) справедливо для инерциальной системы отсчета S_0 . Запишем уравнение движения в произвольной неинерциальной системе отсчета S , центр которой движется произвольным образом относительно S_0 по закону $\vec{R}(t)$. Кроме того имеется вращение системы S , которое описывается угловым вектором $\vec{\Omega}(t)$.

В этом случае функция Лагранжа и уравнение движения имеют вид

$$\mathcal{L} = -\frac{m\dot{\vec{v}}^2}{2} - m\dot{\vec{v}} \left[\vec{\Omega} \vec{r} \right] + \frac{m}{2} \left\{ \vec{\Omega}^2 \vec{r}^2 - \left(\vec{\Omega} \vec{r} \right)^2 \right\} - m\vec{r} \vec{V} - U, \quad (2.12)$$

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\dot{\vec{V}} + 2m \left[\vec{v} \vec{\Omega} \right] + m \left[\vec{r} \dot{\vec{\Omega}} \right] + m \left[\vec{\Omega} \left[\vec{r} \vec{\Omega} \right] \right], \quad (2.13)$$

где $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ — скорость движения центра системы S .

2.2.2. Задачи

1. Найти отклонение свободно падающего с высоты h тела от вертикали, обусловленное вращением Земли. Угловую скорость вращения

Земли Ω считать малой. *Ответ:*

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} g\Omega \cos \lambda,$$

где λ — северная широта (отрицательные значения y соответствуют отклонению на восток).

2. Определить отклонение от плоскости для тела, брошенного с поверхности Земли с начальной скоростью \vec{v}_0 . *Ответ:*

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2} \left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z \right).$$

3. Определить влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника (маятник Фуко²). *Ответ:* $\xi(t) = e^{-i\Omega_z t} \xi_0(t)$, где функция $\xi_0(t) = A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}$ — описывает траекторию маятника без учета вращения Земли. Влияние вращения сводится к повороту траектории вокруг вертикали с угловой скоростью Ω_z ($\Omega_z \ll \omega$).

4. Найти траекторию маятника Фуко.

5. Точка подвеса математического маятника движется с постоянным ускорением \vec{a} (лежащим в плоскости колебаний маятника) в горизонтальном направлении. Найти закон движения маятника.

6. Материальная точка, подвешенная на нити длины l , вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω , а точка подвеса маятника движется вверх по вертикали с постоянным ускорением a . Определить ускорение a , если известно, что маятник, отклоненный от вертикали на угол φ , остается в том же положении. *Ответ:* $a = -g + \Omega^2 l \cos \varphi$.

7. Шарик движется в поле тяжести Земли по прямой, образующей угол α с вертикалью и вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси. Найти величину скорости шарика как функцию положения. *Ответ:*

$$v^2(x) = \frac{2}{m} \left(E - mgx \cos \alpha + \frac{m}{2} \Omega^2 x^2 \sin^2 \alpha \right),$$

где x — расстояние, отсчитываемое вдоль прямой, E — полная механическая энергия шарика во вращающейся системе отсчета.

²Жан Бернар Леон ФУКО (1819–1868) — французский физик. В 1851 году с помощью 67 метрового маятника в Парижском Пантеоне публично продемонстрировал, что Земля вращается вокруг своей оси.

8. Шарик массы m нанизан на гладкую плоскую кривую, расположенную в вертикальной плоскости и равномерно вращающуюся с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси. Найти уравнение этой кривой, если шарик находится в равновесии в произвольной точке кривой. *Ответ:* $y = \frac{\Omega^2}{2g} x^2 + \frac{E}{mg}$.
9. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω . Найти закон движения точки в поле тяжести Земли в системе отсчета, связанной с плоскостью. Записать интегралы движения.
10. Оценить величину сил инерции при движении тела вблизи поверхности Земли в малой области пространства.
11. Оценить влияние Луны на ускорение свободного падения в различных точках земной поверхности. *Ответ:*

$$\Delta \vec{g} = GM_{\text{Л}} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}}{|\vec{r}_1 + \vec{r}|^3} \right) \approx \frac{GM_{\text{Л}}}{r_1^2} \left(\frac{3\vec{r}_1}{r_1^3} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{r}}{r_1} \right),$$

где $M_{\text{Л}}$ — масса Луны, \vec{r}_1 — радиус-вектор, соединяющий центры Луны и Земли, \vec{r} — радиус-вектор тела, проведенный из центра Земли, $|\vec{r}_1| \gg |\vec{r}|$.

2.3. Движение заряженных частиц

2.3.1. Теория

Уравнение движения заряженной частицы, характеризующейся зарядом e , имеет вид

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v} \vec{H}], \quad (2.14)$$

где $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, c — скорость света, электрическое поле \vec{E} и магнитное поле \vec{H} определяются через векторный потенциал \vec{A} и скалярный потенциал Φ

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.15)$$

Роль электрического поля может играть любая удельная внешняя сила \vec{f} . Тогда в общем случае уравнение (2.14) можно переписать в виде

$$\dot{\vec{v}} = \vec{f} + [\vec{v} \vec{\Omega}_H], \quad (2.16)$$

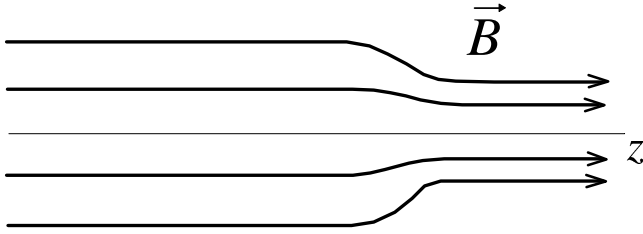


Рис. 2.6. Магнитное поле с продольным градиентом.

где $\vec{\Omega}_H = \frac{q\vec{H}}{mc}$. Частица участвует в двух типах движения. Она вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}_H$, а в среднем заряженная частица движется со скоростью

$$\vec{V}_{drift} = \frac{[\vec{f}\vec{\Omega}_H]}{\Omega_H^2}, \quad (2.17)$$

которую называют скоростью дрейфа.

В неоднородном магнитном поле $\vec{H}(\vec{r})$ скорость дрейфа в случае поперечного градиента оказывается равна

$$\vec{V}_{drift} = \frac{v_0^2 mc}{2eH} \frac{[\vec{H}\vec{\nabla}H]}{H^2}. \quad (2.18)$$

В этом случае частица в среднем движется в направлении, перпендикулярном магнитному полю и градиенту магнитного поля.

2.3.2. Задачи

1. Решить уравнение (2.16) и найти закон движения для заряженной частицы в поле тяжести $\vec{f} = -g \cdot \vec{e}_z$.
2. Рассмотреть движение заряженной частицы в азимутально-симметричном магнитном поле с продольным градиентом (рис. 2.6). Как будет меняться скорость движения частицы вдоль z -координаты?
3. Определить траекторию движения частицы с массой m и зарядом q , если частица вступила в однородное нестационарное электрическое поле $E = E_0 \cos(\omega t)$ со скоростью \vec{v}_0 , перпендикулярной к направлению электрического поля.
4. Задача о дрейфе в неоднородном магнитном поле. Имеется неоднородное магнитное поле (B_1 и B_2 — константы)

$$\vec{B} = \vec{e}_x \cdot B(y) = \begin{cases} B_1 & , y < 0 \\ B_2 & , y \geq 0. \end{cases}$$

В начальный момент времени частица находится в точке $x = y = z = 0$ и имеет скорость $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$. Получить закон движения. Определить траекторию движения для данного случая. Как различается закон движения в случаях $B_1 > B_2$ и $B_1 < B_2$? Как согласуется полученный результат с формулой (2.18)?

5. Рассчитайте значения частоты и радиуса вращения для электрона и однократно ионизованного атома кислорода в магнитном поле Земли.
6. За какое время t_0 заряженная частица сделает полный оборот вокруг Земли в результате дрейфа? Сделайте оценку t_0 для протона на экваторе на высоте 500 км.

2.4. Уравнения движения твердого тела

2.4.1. Теория

Под твердым телом в механике понимают тело конечных размеров, у которого геометрическая форма и распределение массовой плотности не меняются в процессе движения. Поэтому твердое тело можно считать системой материальных точек, которые находятся на неизменном расстоянии между собой. В основе описания движения твердого тела лежит разделение пространственного перемещения на два типа: 1) движение центра масс, 2) вращение вокруг мгновенной оси, которая проходит через центр масс или другую заданную точку. В соответствии с этим в общем случае в качестве обобщенных координат выбирают три координаты центра масс $\vec{R} = \{X, Y, Z\}$ и три угла $\vec{\gamma} = \{\theta, \varphi, \beta\}$.

Рассматривая твердое тело, как систему материальных частиц, запишем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{\mu}{2} V^2 + \frac{I_{ik}}{2} \Omega_i \Omega_k, \quad (2.19)$$

где $\mu = \sum_q m_q$ — полная масса тела,

$$I_{ik} = \sum_q m_q (\delta_{ik} x_{qj} x_{qj} - x_{qi} x_{qk}) \quad (2.20)$$

есть тензор инерции твердого тела³. Последний в случае непрерывно рас-

³Будем использовать стандартное правило: если в уравнении дважды встречается

пределенной массы можно переписать в виде

$$I_{ik} = \int \{ \delta_{ik} (x^2 + y^2 + z^2) - x_i x_k \} \varrho(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.21)$$

где ϱ — объемная плотность. В общем случае тензор I_{ik} определяется девятью скалярными величинами:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \int \varrho \{y^2 + z^2\} dV & - \int xy \varrho dV & - \int xz \varrho dV \\ - \int yx \varrho dV & \int \varrho \{x^2 + z^2\} dV & - \int yz \varrho dV \\ - \int zx \varrho dV & - \int yz \varrho dV & \int \varrho \{x^2 + y^2\} dV \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Если тело состоит из конечного числа частиц, то вместо интегрирования проводим суммирование $\int(\dots) \varrho dV \longrightarrow \sum(\dots) m$. Суммирование проводится по частицам, из которых состоит твердое тело (индекс q опущен). Как и любой симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направления осей.

В общем случае твердое тело имеет шесть степеней свободы и в качестве обобщенных координат выбираем три декартевы координаты центра масс $\vec{R} = \{X, Y, Z\}$ и три угла, поэтому уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}}, \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\gamma}}, \quad (2.24)$$

где $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$ — угловая скорость вращения твердого тела.

Момент импульса твердого тела относительно центра инерции равен

$$L_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (2.25)$$

Направления векторов \vec{L} и $\vec{\Omega}$ совпадают только в том случае, если вращение тела происходит вокруг одной из главных осей инерции. В отсутствии внешних сил для твердого тела имеем закон сохранения момента импульса $\vec{L} = \text{const}$.

один и тот же индекс, то по нему подразумевается суммирование. Например: $a_{ik} b_{im} \equiv \sum_i a_{ik} b_{im}$.

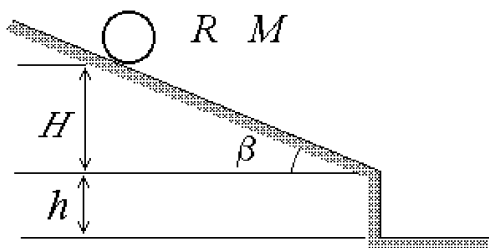


Рис. 2.7. К задаче 2.

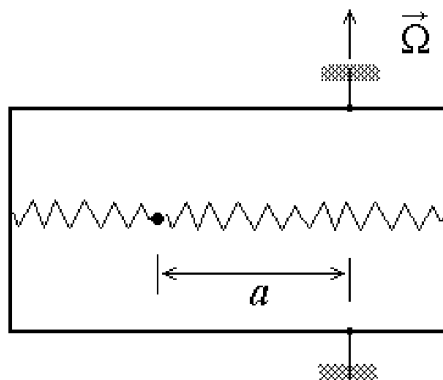


Рис. 2.8. К задаче 3.

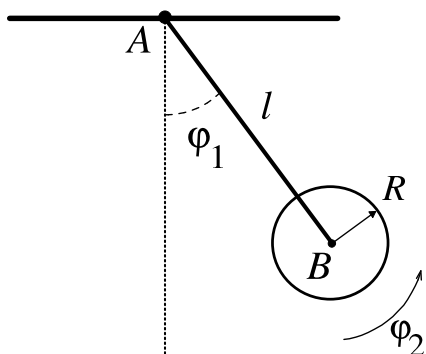


Рис. 2.9. К задаче 4.

2.4.2. Задачи

1. Получить и сравнить законы движения скатывающегося с горки однородного шарика радиуса R и материальной точки (массы одинаковы). Какое тело окажется первым и почему?
2. Определить закон движения шарика (см. рис. 2.7).
3. Рамка с частицей массы m , закрепленной на пружинках (длины которых l , коэффициент жесткости k и натяжения при неподвижной рамке f) вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси z , смещенной на расстояние a от центра рамки (рис. 2.8). Получить уравнение движения.
4. Имеется стержень массы m и длины l (рис. 2.9). На конце находится ось, на которую насажен однородный диск радиусом R и массой M . Стержень может вращаться относительно точки A , а диск относительно оси B . Записать функцию лагранжа и получить уравнения движения. *Ответ:*

$$\mathcal{L} = \left(\frac{m}{6} + \frac{M}{2} \right) l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{MR^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + gl \left(\frac{m}{2} + M \right) \cos \varphi_1.$$

Рис. 2.10. К задаче 5.

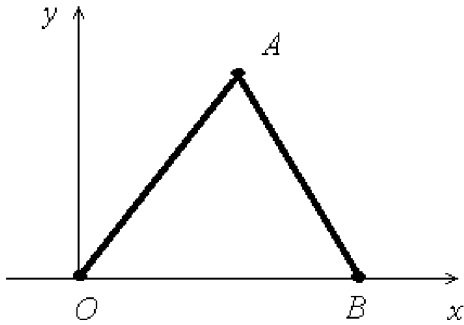
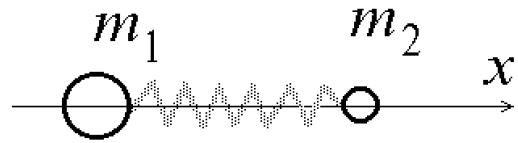


Рис. 2.11. К задаче 6

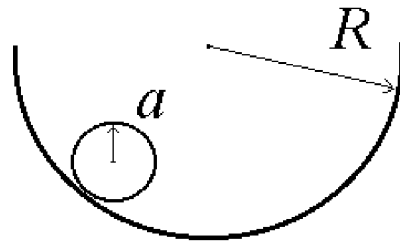


Рис. 2.12. К задаче 7

5. Определить движение системы двух масс m_1 и m_2 , насаженных на гладкий горизонтальный стержень (ось OX). Массы связаны пружиной с жесткостью k и могут двигаться поступательно вдоль стержня. Расстояние между центрами тяжести масс при ненапряженной пружине равно l (рис. 2.10). Начальное состояние системы определяется следующими значениями скоростей и координат центров тяжести масс: $x_1 = 0$, $\dot{x}_1 = u_0$, $x_2 = l$, $\dot{x}_2 = 0$.
6. Найти кинематическую энергию системы (рис. 2.11). OA и AB тонкие однородные стержни длины l , шарнирно скрепленные в точке A . Стержень OA вращается в плоскости рисунка вокруг точки O , а конец B стержня AB скользит вдоль оси OX . Записать уравнения движения системы.
7. Записать уравнение движения однородного цилиндра радиуса a , катящегося по внутренней поверхности другого цилиндра радиуса R (рис. 2.12).
8. Определить главные моменты инерции следующих однородных тел:
 - а) Тонкий стержень длины l . *Ответ:* $I_1 = I_2 = Ml^2/12$, $I_3 = 0$.
 - б) Шар радиуса R . *Ответ:* $I_1 = I_2 = I_3 = 2MR^2/5$.
 - в) Круговой цилиндр радиуса R и высотой h . *Ответ:* $I_1 = I_2 = M(R^2 + h^2/3)/4$, $I_3 = MR^2/2$.
 - г) Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер a , b , c . *Ответ:* $I_1 = M(b^2 + c^2)/12$, $I_2 = M(c^2 + a^2)/12$, $I_3 = M(a^2 + b^2)/12$.
 - д) Круговой конус с высотой h и радиусом

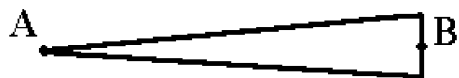


Рис. 2.13. К задаче 11

основания R . Ответ: $I_1 = I_2 = 3M(R^2 + h^2/4)/20$, $I_3 = 3MR^2/10$.
 е) Трехосный эллипсоид с полуосями a , b , c .

9. Почему длинный шест на пальце удерживать проще, чем короткий? Запишите уравнение движения для однородного стержня, у которого нижний конец шарнирно закреплен.
10. Стержень составлен из двух частей: первый кусок длины l_1 имеет постоянную плотность ρ_1 , второй кусок длины l_2 имеет также постоянную, но другую плотность ρ_2 . Найти положение центра тяжести стержня и главные моменты инерции.
11. Маятник имеет вид тонкой треугольной полоски из листового материала (см. рис. 2.13). Определить период колебаний, если маятник подвешен:
 - а) за острый конец A ,
 - б) за середину основания B .
 В обоих случаях определить, как надо сместить точку подвеса, чтобы получить минимальный период колебаний.
12. Беззаботный водитель рванул с места с ускорением a , не заметив, что одна из дверей автомобиля была открыта на 90° . Найти угловое ускорение, с которым дверь начнет закрываться. Известны: масса двери M , момент инерции двери относительно петель I и расстояние L от центра масс до оси вращения.
13. Определить функцию Лагранжа, написать уравнение движения для “физико-математического” маятника (рис. 2.14), состоящего из однородного стержня и математического маятника.
14. Найти период обращения шарика радиуса a в цилиндре радиуса R (см. рис. 2.15).
15. Получить функцию Лагранжа и уравнения движения системы, состоящей из однородного диска, подвешенного за ось на пружинке, и двух грузов, соединенных нитью, перекинутой через диск (нить невесома) (рис. 2.16).

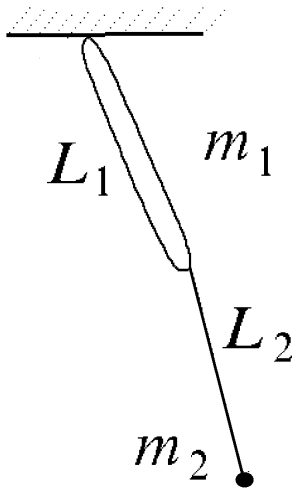


Рис. 2.14. Физико-математический маятник. К задаче 13

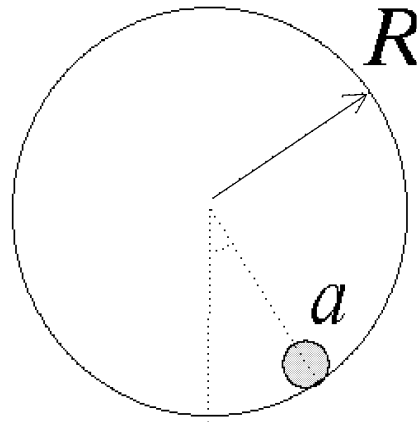


Рис. 2.15. К задаче 14

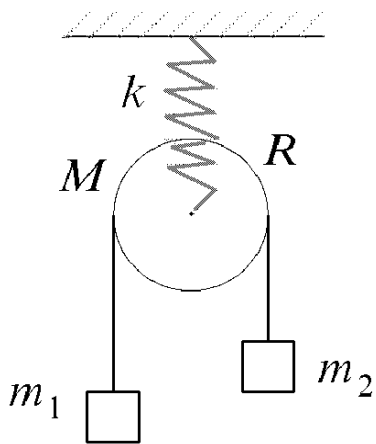


Рис. 2.16. К задаче 15. Однородный диск на пружине.

16. Шар и цилиндр скатываются с наклонной плоскости. Какое тело скатится при прочих равных условиях быстрее? Во сколько раз?
17. Почему шест помогает удерживать равновесие при ходьбе на канате?
18. Кому проще ходить по канату: высокому или низкому человеку? Почему?

Глава 3

Малые колебания и волны

3.1. Системы с одной степенью свободы

Рассмотрим систему с потенциальной энергией $U(q)$, которая имеет минимум в точке q_0 . Разложим функцию $U(q)$ в ряд вблизи точки q_0 и ограничимся исследованием движения системы в малой окрестности этого состояния:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(q = q_0)}{dq^2} (q - q_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U(q = q_0)}{dq^3} (q - q_0)^3 + \dots \quad (3.1)$$

Если кинетическую энергию можно представить в виде $T = \frac{m\dot{q}^2}{2}$ и ограничиться только квадратичным слагаемым в (3.1), то такие одномерные системы будем называть линейными. Колебания в этом случае происходят под действием линейной возвращающей силы $F = -k(q - q_0)$, где $k = \frac{d^2U(q = q_0)}{dq^2}$.

Если потенциальная энергия имеет точку минимума, это означает, что имеется устойчивое равновесие. Для малой энергии амплитуда колебаний мала и мы практически всегда можем ограничиться квадратичным слагаемым в разложении (3.1). Таким образом, функция Лагранжа для линейной одномерной колебательной системы принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad (3.2)$$

где $x = q - q_0$, $k = U''(q_0)$. Подставляя (3.2) в (2.4), получаем уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\omega_0^2 = k/m), \quad (3.3)$$

общим решением которого являются гармонические функции

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (3.4)$$

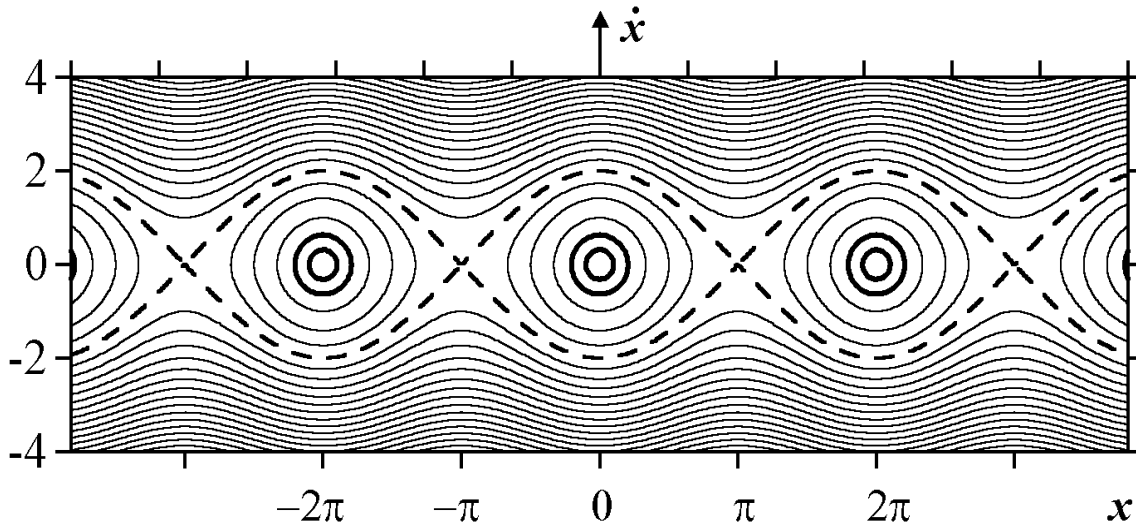


Рис. 3.1. Фазовый портрет математического маятника. Показаны линии постоянной энергии маятника. Вблизи точек $\dot{x} = 0$, $x = \pm 2n\pi$ (n — целое число) линии близки к окружностям (толстые линии), что соответствует линейному приближению (частота колебания не зависит от амплитуды). С ростом энергии окружности переходят в овалы и период начинает зависеть от амплитуды. Когда энергия становится больше $2mgl$, колебания превращаются в свободное вращение вокруг точки подвеса. Кривые, разделяющие область колебаний от свободного движения (вращения), называются сепаратрисой (показаны штриховой линией).

Фаза α и амплитуда A определяются начальным состоянием колебательной системы. На рис. 3.1 изображен фазовый портрет математического маятника, который описывается уравнением $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$.

3.2. Колебания с несколькими степенями свободы

Рассмотрим систему с N степенями свободы, состояние которой определяется набором обобщенных координат q_i ($i = 1, 2, \dots, N$). В точке $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{N0})$ функция U имеет минимум. Тогда в окрестности этой точки можно записать:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_N) = U(q_{10}, \dots, q_{N0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \cdot (q_i - q_{i0})(q_j - q_{j0}) + \dots, \quad (3.5)$$

где $k_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\bar{q}_0}$. Введем отклонения от положения равновесия вдоль соответствующей обобщенной координаты $x_i = q_i - q_{i0}$. Принимая для кинетической энергии квадратичную форму

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (3.6)$$

получаем систему уравнений, описывающих динамику малых колебаний

$$\sum_{j=1}^N \{ m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j \} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.7)$$

Подставим функции

$$x_j = A_j \exp \{ -i\omega t \} \quad (3.8)$$

в (3.7). В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно амплитуд A_j :

$$\sum_{j=1}^N (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) \cdot A_j = 0. \quad (3.9)$$

Условие существования нетривиальных решений (3.9) приводит к уравнению N -ой степени относительно квадрата частоты ω^2 :

$$\det (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) = 0. \quad (3.10)$$

Дисперсионное уравнение (3.10) дает набор собственных частот $(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2)$. В итоге имеем решения для всех координат:

$$x_j(t) = A_{j1} \cdot e^{-i\omega_1 t} + A_{j2} \cdot e^{-i\omega_2 t} + \dots + A_{jN} \cdot e^{-i\omega_N t}. \quad (3.11)$$

3.3. Задачи

1. Показать, что соотношение между периодом колебаний математического маятника и энергией имеет вид $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} F(E/mgl)$, где функция F — эллиптический интеграл. Рассмотреть предельный переход, соответствующий движению по сепаратрисе.
2. Изобразить фазовый портрет для линейного осциллятора с трением. Рассмотреть различные значения коэффициента трения.
3. Определить частоты колебаний двойного математического маятника (см. задачу 1 п. 2.1.2). *Ответ:*

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} \left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - \frac{4m_1\omega_{01}^2\omega_{02}^2}{m_1 + m_2}} \right].$$

4. Записать уравнения движения линейного осциллятора при наличии кулоновского трения (рис. 3.2). Тело массы m под действием упругой силы пружин движется по горизонтальной поверхности, k —

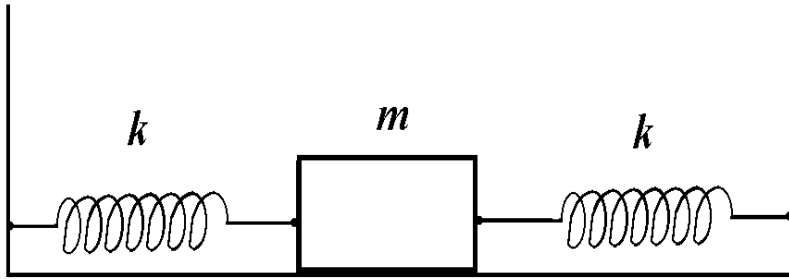


Рис. 3.2. К задаче 4

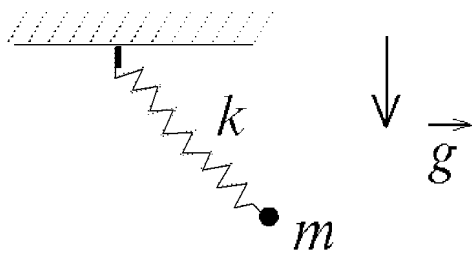


Рис. 3.3. Тело на пружинке в поле тяжести

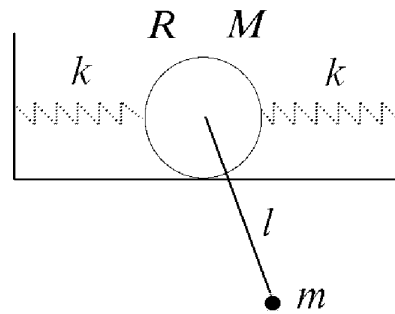


Рис. 3.4. К задаче 8

коэффициент упругости пружин. Определить закон движения. Нарисовать фазовый портрет.

5. Найти частоту колебаний точки массы m , движущейся по прямой и прикрепленной к пружине. Пружина, имея длину l , натянута с силой F .
6. Найти частоту колебаний точки массы m , движущейся по окружности и прикрепленной к пружине. Пружина, имея длину l , натянута с силой F .
7. Найти функцию Лагранжа, вывести уравнения движения и найти частоту малых колебаний математического маятника, подвешенного на пружинке жесткости k , имеющей в равновесии длину l (рис. 3.3).
8. Определить частоты малых колебаний в системе, состоящей из однородного диска массы M и радиуса R и математического маятника, прикрепленного к оси диска (см. рис. 3.4).
9. Найти собственную частоту малых колебаний шарика радиуса a в цилиндре радиуса R (см. рис. 2.15).
10. Частица массы m может скользить по проволочному эллипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, вращающемуся с угловой скоростью $\Omega = \text{const}$ вокруг вертикальной оси Oy в поле тяжести. Определить положение равновесия и частоту малых колебаний частицы вблизи от ее

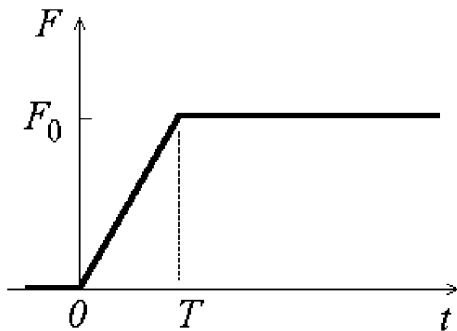


Рис. 3.5. К задаче 12.

положения равновесия.

11. Определить вынужденные колебания системы под влиянием силы $F(t)$, если в начальный момент $t = 0$ система покоится в положении равновесия ($x = 0, dx/dt = 0$) для: а) $F = \text{const}$, б) $F = at$, в) $F = F_0 \exp(t/\tau)$.

Ответ: а) $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$, б) $x = \frac{a}{m\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$, в) $x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \left(e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right)$.

12. Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы $F(t)$ (см. рис. 3.5). До момента $t = 0$ система покоится в положении равновесия. Как зависит амплитуда колебаний от “времени включения” силы T ?

13. Расстояние между точками подвеса двух математических маятников равно L (рис. 3.6). Как изменяться частоты колебаний, если поместить на массу m заряд q , а на массу M заряд Q .

14. Определить энергию E , приобретенную осциллятором под действием силы $F(t) = F_0 \exp\{-(t/\tau)^2\}$. Ответ: $E = \frac{F_0^2}{2m} \sqrt{\pi} \tau \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}\right)$.

15. Определить положения устойчивого равновесия маятника длины l ,

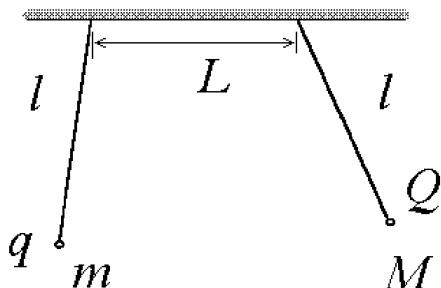


Рис. 3.6. К задаче 13.

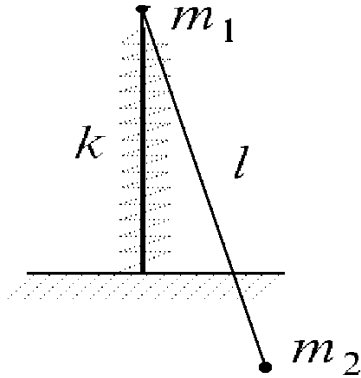


Рис. 3.7. К задаче 18

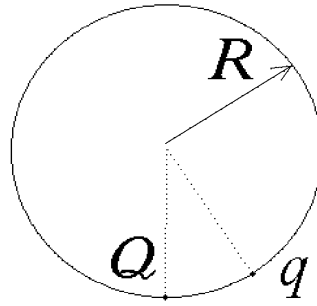
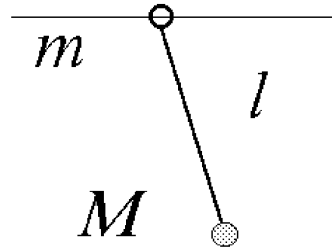


Рис. 3.8. К задаче 19

Рис. 3.9. Математический маятник, у которого точка подвеса может без трения совершать горизонтальные движения. К задаче 20.



точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с амплитудой $a \ll l$ с большой частотой (см. задачу 3 п. 2.1.2).

16. Определить положения устойчивого равновесия маятника длины l , точка подвеса которого совершает горизонтальные колебания с амплитудой $a \ll l$ с большой частотой (см. задачу 3 п. 2.1.2).
17. Для задачи 7 п. 2.4.2 определить частоту малых колебаний вблизи положения равновесия. *Ответ:* $\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R-a}}$.
18. Найти функцию Лагранжа, вывести уравнения движения и определить частоты малых колебаний системы, изображенной на рис. 3.7.
19. Частица в поле тяжести массы m и заряда q может скользить по проволочной окружности радиуса R , в нижней точке которой (все в поле тяжести) закреплен заряд Q . Определить частоту малых колебаний частицы вблизи ее положения равновесия (рис. 3.8).
20. Найти частоты колебаний, изображенного на рис. 3.9 маятника, точка подвеса которого (с массой m в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении.
21. Определить частоту малых колебаний астетического маятника, употребляемого в некоторых простых сейсмографах для записи колеба-

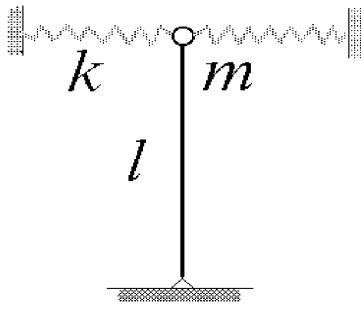


Рис. 3.10. Астетический маятник. К задаче 21.

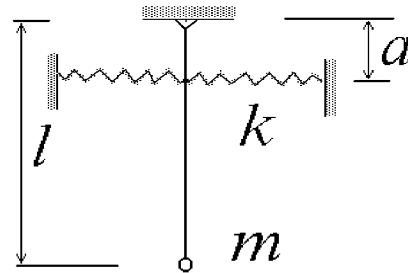
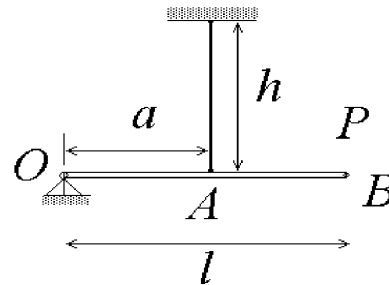


Рис. 3.11. К задаче 23.

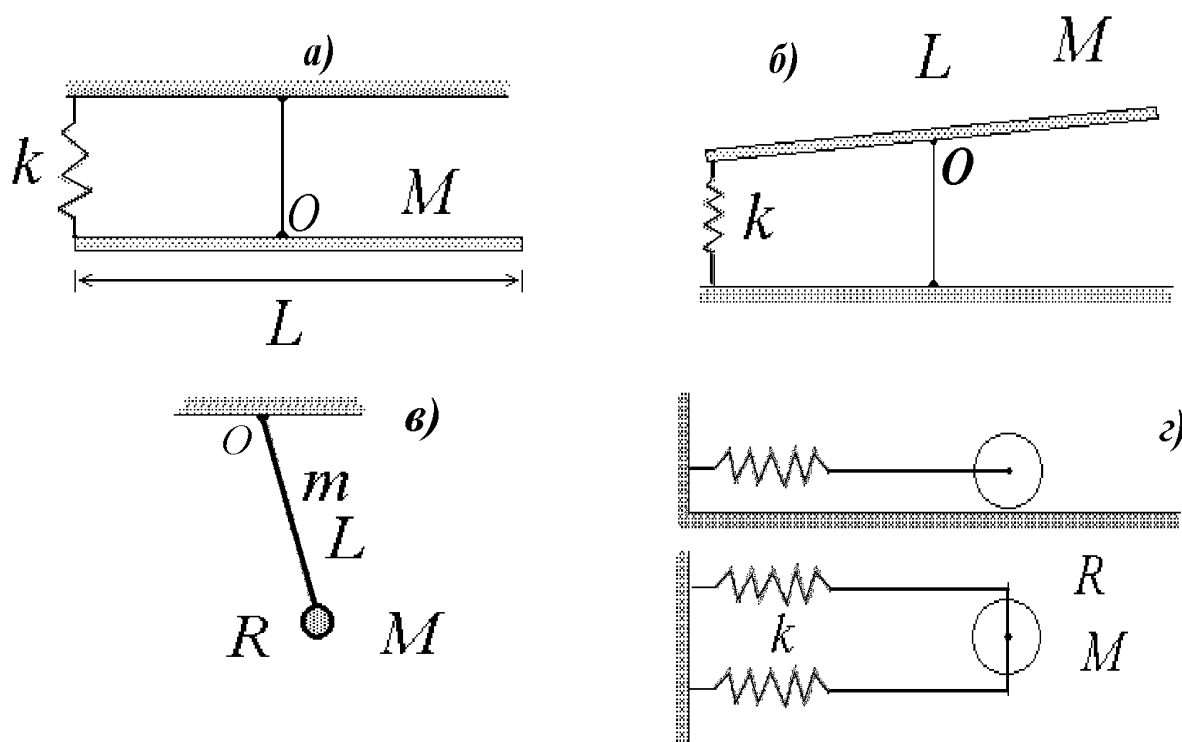
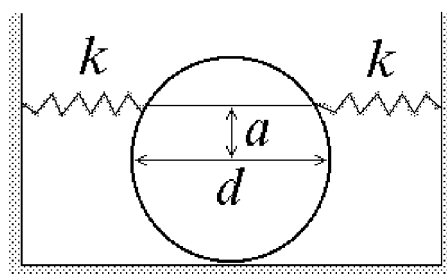
Рис. 3.12. К задаче 24.



ний почвы. Маятник состоит из жесткого стержня длиной l , несущего на конце массу m , зажатую между двумя горизонтальными пружинами жесткости k с закрепленными концами (рис. 3.10). Массой стержня пренебречь и считать пружины в положении равновесия ненапряженными. Чем обусловлено использование данной системы в сейсмографах? *Ответ:* $\omega = \sqrt{2 \frac{k}{m} - \frac{g}{l}}$.

22. Определить равновесие и исследовать устойчивость равновесного состояния для системы в задаче 3 п. 2.4.2.
23. Маятник состоит из жесткого стержня длиной l , несущего массу m на своем конце (рис. 3.11). К стержню прикреплены две пружины жесткости k на расстоянии a от его верхнего конца. Противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, найти частоту малых колебаний маятника. *Ответ:* $\omega^2 = \frac{2ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}$.
24. Жесткий стержень OB длиной l может свободно качаться на шаровом шарнире около конца O и несет шарик весом P на другом конце (рис. 3.12). Стержень удерживается в горизонтальном положении посредством нерастяжимого вертикального шнура длиной h . Расстояние $|OA| = a$. Если шарик оттянуть перпендикулярно к плоскости

Рис. 3.13. К задаче 25.

Рис. 3.14. К задаче 26. Относительно точек O стержни могут совершать вращательные движения.

чертежа и затем отпустить, то система начнет колебаться. Пренебрегая массой стержня, определить частоту малых колебаний системы.
 Ответ: $\omega^2 = \frac{ag}{hl}$.

25. Цилиндр диаметром d и массой m может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Две одинаковые пружины жесткости k прикреплены посередине на расстоянии a от оси цилиндра (рис. 3.13). Вычислить период малых колебаний.

Ответ: $\tau = \frac{\pi\sqrt{3}}{1 + 2a/d} \sqrt{\frac{m}{k}}$.

26. Определить частоты колебаний систем, изображенных на рис. 3.14.

27. Заряженная частица движется по прямой, на которой закреплены неподвижно два одинаковых заряда симметрично относительно начала координат на расстоянии $2l$ друг от друга. Исследовать устойчивость положения равновесия.
28. Два одинаковых заряда неподвижно закреплены относительно начала координат на расстоянии $2l$ друг от друга. Заряженная частица движется по прямой, перпендикулярной к линии, на которой находятся неподвижные заряды. Исследовать устойчивость положения равновесия.
29. Исследуйте движение тяжелой однородной пружины без массы. Если длина недеформируемой пружины равна l_0 , погонная масса m и жесткость единицы длины k , покажите, что смещение x элемента длины dl определяется уравнением

$$m dl \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(f + \frac{\partial f}{\partial l} dl \right) - f,$$

где локальное напряжение f связано с удлинением dx сегмента dl , как $f = k \frac{\partial x}{\partial l}$. Дифференциальное уравнение движения в частных производных будет $m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 x}{\partial l^2}$. Получите решение этого уравнения в виде $x(l, t) = x_l(l) \cdot x_t(t)$. Покажите, что закрепленная на одном конце пружина имеет множество частот гармонических колебаний. Найдите наименьшую частоту и соответствующую собственную форму колебаний.

Глава 4

Формализм Гамильтона

4.1. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона

4.1.1. Теория

Функция Гамильтона¹ $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$ дается следующим выражением

$$H = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}, \quad (4.1)$$

где обобщенный импульс по определению равен $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$. Тогда уравнения движения имеют вид ($i = 1, \dots, N$):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (4.2)$$

их называют уравнениями Гамильтона. Функция Гамильтона обладает важными свойствами

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.3)$$

из которых следует, что в системе с $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ энергия является интегралом движения и $H(q_1(t), \dots, q_N(t), p_1(t), \dots, p_N(t)) = E = \text{const}$.

На практике при построении функции Гамильтона удобно пользоваться формулой

$$H = T + U, \quad (4.4)$$

где T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы.

¹Уильям Роуан ГАМИЛЬТОН (1805–1865) — ирландский математик, механик, королевский астроном, профессор астрономии в Дублинском университете и директор университетской астрономической обсерватории. Дал формальное изложение теории комплексных чисел. Построил систему чисел-кватернионов. Сформулировал общий принцип наименьшего действия, работы в области оптики, общий метод динамики, заложил основы векторного исчисления.

Введем скобки Пуассона²:

$$\{g, f\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (4.5)$$

где $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ и $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ — произвольные функции динамических переменных. Аналогично строятся скобки Пуассона для пары величин H и f . Для полной производной можно записать

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (4.6)$$

Если интеграл движения не зависит явно от времени, то $\{H, f\} = 0$. Важнейшее свойство скобок Пуассона заключается в том, что если f и g являются интегралами движения, то скобка Пуассона от них также является интегралом движения, т.е. $\{f, g\} = \text{const}$.

4.1.2. Задачи

1. Записать функцию Гамильтона для одной материальной точки в а) декартовых (x, y, z) , б) цилиндрических (r, φ, z) и в) сферических координатах (r, θ, φ) . *Ответ:*

$$\text{а) } H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z),$$

$$\text{б) } H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z),$$

$$\text{в) } H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся системе отсчета. *Ответ:* $H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega} [\vec{r} \vec{p}] + U$.

3. Построить функцию Гамильтона системы из одной частицы массы M и n частиц с массами m с исключенным движением центра инерции. *Ответ:* $H = \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^n \vec{p}_a^2 + \frac{1}{2M} \left(\sum_{a=1}^n \vec{p}_a \right)^2 + U$.

²Симсон Дени ПУАССОН (Poisson) — французский математик, механик, физик. Основоположник математической физики, труды по математическому анализу, теории вероятности, небесной механике, электростатике, магнетизму, гидродинамике, теории упругости. Его именем названы: уравнение Пуассона, распределение Пуассона, теорема Пуассона, скобки Пуассона, коэффициент Пуассона, интеграл Пуассона.

4. Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого $\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2$.

Ответ: $H = \frac{p^2}{2(1+2\beta x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3$.

5. Найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \lambda \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \right)^2.$$

Ответ: $x = a \cos(\omega t + \varphi)$, $p = -a\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$,
где $\omega = (1 + 2\lambda E_0)\omega_0$, $E_0 = \omega_0^2 a^2 / 2$.

6. Построить функцию Гамильтона свободно движущегося симметричного волчка, выбрав в качестве координат эйлеровы углы θ , φ , ψ .

Ответ: $H = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$, где I_i — главные моменты инерции.

7. Записать уравнения движения частицы, функция Гамильтона которой $H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{cp}{n(\vec{p}, \vec{r})}$ (луч света), где $p = |\vec{p}|$. Найти траекторию, если $n(\vec{r}) = \alpha x$. Ответ:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{c\vec{p}}{np} - \frac{cp}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = \frac{cp}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}; \quad x = C_1 \operatorname{ch} \left(\frac{y}{C_1} + C_2 \right).$$

8. Найти закон движения заряженной частицы в однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$, решая уравнения Гамильтона. Указание: векторный потенциал выбрать в виде $A_y = \mathcal{H}x$, $A_x = A_z = 0$. Ответ:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{e}{c} \mathcal{H}x \right)^2;$$

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + x_0, \quad y = -a \sin(\omega t + \varphi) + y_0, \quad z = \frac{p_z}{m} t + z_0,$$

$$p_x = -m a \omega \sin(\omega t + \varphi), \quad p_y = \text{const}, \quad p_z = \text{const},$$

где $\omega = e\mathcal{H}/(mc)$, $x_0 = cp_y/(e\mathcal{H})$.

9. Найти уравнения Гамильтона для материальной точки, движущейся в однородном гравитационном поле по гладкой сферической поверхности (радиус сферы изменяется по закону $r = r(t)$). Ответ:

$$H = \frac{1}{2mr^2(t)} \left(p_\theta + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{mr^2(t)}{2} - mgr(t) \cos \theta;$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2(t)}, & \dot{p}_\theta &= \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{mr^2(t) \sin^3 \theta} - mgr(t) \sin \theta, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2(t) \sin^2 \theta}, & \dot{p}_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

10. Материальная точка движется по гладкой поверхности кругового конуса с вертикальной осью. Раствор конуса направлен вверх, угол раствора 2α . Записать уравнения Гамильтона. *Ответ:*

$$H = \frac{p_r^2 \sin^2 \alpha}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr\alpha;$$

$$\dot{r} = \frac{p_r \sin^2 \alpha}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg\alpha, \quad \dot{p}_\varphi = 0.$$

11. Докажите следующие свойства для скобок Пуассона: 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$, 2) $\{f, C\} = 0$, где $C = \text{const}$, 3) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$.

12. Вычислить скобки Пуассона: а) $\{L_i, x_j\}$, $\{L_i, p_j\}$, $\{L_i, L_j\}$; б) $\{\vec{a}\vec{p}, \vec{b}\vec{r}\}$, $\{\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{r}\}$, $\{\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{L}\}$; в) $\{\vec{L}, \vec{r}\vec{p}\}$, $\{\vec{p}, r^n\}$, $\{\vec{p}, (\vec{a}\vec{r})^2\}$. Здесь x_i, p_i, L_i — декартовы компоненты векторов, \vec{a}, \vec{b} — постоянные векторы. *Ответ:*

$$а) \quad \{L_i, \varphi_j\} = -\sum_k e_{ijk} \varphi_k, \quad \text{где } \varphi_j = (x_j, p_j, L_j);$$

$$б) \quad \{\vec{a}\vec{p}, \vec{b}\vec{r}\} = \vec{a}\vec{b}, \quad \{\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{r}\} = -[\vec{a}\vec{b}]\vec{r}, \\ \{\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{L}\} = -[\vec{a}\vec{b}]\vec{L};$$

$$в) \quad \{\vec{L}, \vec{r}\vec{p}\} = 0, \quad \{\vec{p}, r^n\} = -\vec{r}nr^{n-2}, \quad \{\vec{p}, (\vec{a}\vec{r})^2\} = 2\vec{a}(\vec{a}\vec{r}).$$

Здесь e_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$, $e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1$, остальные компоненты e_{ijk} равны нулю.

13. Вычислить скобки Пуассона $\{A_i, A_j\}$, где $A_1 = (x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2)/4$, $A_2 = (xy + p_x p_y)/2$, $A_3 = (xp_y - yp_x)/2$, $A_4 = x^2 + p_x^2 + y^2 + p_y^2$. *Ответ:*

$$\{A_i, A_j\} = -\sum_k e_{ijk} A_k, \quad \{A_i, A_4\} = 0,$$

где i, j, k — принимают значения 1, 2, 3.

14. Вычислить $\{L_i, \Lambda_{jk}\}$, $\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\}$, где $\Lambda_{ik} = x_i x_k + p_i p_k$. Ответ:

$$\{L_i, \Lambda_{jk}\} = - \sum_{\ell} (e_{ij\ell} \Lambda_{\ell k} + e_{ik\ell} \Lambda_{\ell j}),$$

$$\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\} = \delta_{ij} L_{\ell k} + \delta_{ik} L_{\ell j} + \delta_{il} L_{ik} + \delta_{kl} L_{ij},$$

где $L_{k\ell} = p_k x_{\ell} - p_{\ell} x_k$.

15. Вычислить скобки Пуассона $\{\vec{f}, \vec{a} \vec{L}\}$, $\{\vec{f} \vec{L}, \vec{g} \vec{L}\}$, где \vec{a} — постоянный вектор, \vec{f} , \vec{g} — векторные функции \vec{r} и \vec{p} . Ответ:

$$\{\vec{f}, \vec{a} \vec{L}\} = [\vec{f} \vec{a}], \quad \{\vec{f} \vec{L}, \vec{g} \vec{L}\} = [\vec{f} \vec{a}] \vec{L} + \sum_{i,k} L_i L_k \{f_i, g_k\}.$$

16. Найти $\{v_i, v_j\}$ для частицы в магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$. Ответ:

$$\{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2 c} \sum_k e_{ijk} \mathcal{H}_k.$$

17. Составить уравнения движения проекции L_{α} момента импульса на оси, связанные со свободно вращающимся телом. Функция Гамильтона $H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (I^{-1})_{\alpha\beta} L_{\alpha} L_{\beta}$. Ответ:

$$\dot{L}_{\alpha} = \sum_{\beta, \gamma, \delta} e_{\alpha\beta\gamma} (I^{-1})_{\gamma\delta} L_{\beta} L_{\delta}.$$

18. Как известно, для частицы в поле $U = -\alpha/r$ существует интеграл движения $\vec{A} = [\vec{v} \vec{L}] - \frac{\alpha \vec{r}}{r}$.

а) Вычислить скобки Пуассона $\{A_i, A_j\}$, $\{A_i, L_j\}$.

б) В случае финитного движения ($E < 0$) для векторов $\vec{J}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\vec{L} \pm \sqrt{\frac{m}{-2H}} \vec{A} \right)$ вычислить скобки Пуассона $\{H, \vec{J}_{1,2}\}$, $\{J_{1i}, J_{2j}\}$, $\{J_{1i}, J_{1j}\}$, $\{J_{2i}, J_{2j}\}$ и сравнить их со скобками Пуассона для компонент момента импульса \vec{L} . Выразить функцию Гамильтона H через \vec{J}_1 и \vec{J}_2 . Ответ:

$$а) \quad \{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{A_i, L_j\} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_k;$$

$$б) \quad \begin{cases} \{H, \vec{J}_{1,2}\} = 0, & \{J_{1i}, J_{2j}\} = 0, \\ \{J_{1i}, J_{1j}\} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_{1k}, & \{J_{2i}, J_{2j}\} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_{2k}; \end{cases}$$

$$H = -\frac{m\alpha^2}{4(\vec{J}_1^2 + \vec{J}_2^2)}.$$

19. Показать, что функция $f = x - pt/m$ является интегралом движения свободной частицы в отсутствие внешних сил.
20. Доказать, что для скобок Пуассона выполняется: а) $\{L_i, \vec{p}^2\} = 0$; б) $\{L_i, \vec{r}^2\} = 0$.
21. Вычислить для точки в центральном поле $U(r)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) скобки $\{L_x, H\}$, $\{L_y, H\}$. Покажите, что $L_z = \{L_x, L_y\}$. Используя свойства скобок Пуассона, сделайте вывод об интегралах движения.

4.2. Уравнение Гамильтона–Якоби

4.2.1. Теория

Действие определяется интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt. \quad (4.7)$$

Последний берется вдоль траектории между двумя положениями $\vec{q}^{(1)}$ и $\vec{q}^{(2)}$, которые система занимает в заданные моменты времени t_1 и t_2 .

Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона) является наиболее общей формулировкой закона механического движения. Он гласит: пусть в моменты времени t_1 и t_2 система находится в положениях, которые определяются соответственно координатами $\vec{q}^{(1)}$ и $\vec{q}^{(2)}$. Тогда истинная траектория движения между этими положениями соответствует минимальному значению интеграла (4.7).

Уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, t\right) = 0. \quad (4.8)$$

Оно получается из определения действия (4.7) $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}$ с учетом (4.1). В этом случае действие зависит от времени в следующем смысле: считаем, что траектория оканчивается в точке $\vec{q}^{(2)}$ в различные моменты времени $t_2 = t$. В уравнении (4.8) используем функцию Гамильтона, в

которую вместо обобщенных импульсов подставляем частные производные функции S по соответствующим координатам.

В том случае, если координата q_n и $\frac{\partial S}{\partial q_n}$ входят в уравнение Гамильтона–Якоби только в виде некоторой комбинации $\varphi\left(q_n, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)$, не содержащей других координат, то возможно разделение переменных. В результате относительно переменной q_n получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, а основное уравнение в частных производных имеет меньше независимых переменных.

4.2.2. Задачи

1. Найти действие материальной точки, движущейся в отсутствие поля и проходящей через точки $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ и $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$. *Ответ:*

$$S = \frac{m(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}{2(t_2 - t_1)}. \quad (4.9)$$

2. Найти действие для одномерного гармонического осциллятора, проходящего через точки $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x(t_2)$. *Ответ:*

$$S = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t_2 - t_1)} [(x_1^2 + x_2^2)\cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1x_2],$$

$$\text{при } \omega \rightarrow 0 \text{ получаем } S = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)},$$

что совпадает с (4.9).

3. Найти действие для заряда, движущегося в однородном магнитном поле. *Ответ:*

$$S = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} + \frac{\omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega \Delta t}{2} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \omega(x_1 y_2 - x_2 y_1)] \right\},$$

где $\omega = e\mathcal{H}/mc$, $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

4. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и закон движения материальной точки в отсутствие поля. *Ответ:*

$$S = -\frac{|\vec{p}_0|^2}{2m} t + \vec{p}_0 \vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}_0}{m} t.$$

5. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для точки, движущейся в однородном гравитационном поле. Найти полный интеграл этого уравнения, а также траекторию и закон движения точки. *Ответ:*

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y - \frac{[2m(E_0 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2]^{3/2}}{3m^2 g},$$

$$z = z_0 - \frac{m^2 g}{4} \left[\frac{(x_0 - x)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(y_0 - y)^2}{\alpha_2^2} \right],$$

$$x = x_0 - \frac{\alpha_1}{m} (t_0 - t), \quad y = y_0 - \frac{\alpha_2}{m} (t_0 - t), \quad z = z_0 - \frac{g}{2} (t_0 - t)^2,$$

где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0) = (2mE_0 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2)/(2m^2 g)$, $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$.

6. Найти полный интеграл уравнение Гамильтона–Якоби для тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. *Ответ:*

$$S = -E_0 t + p_0 y + \frac{[2mE_0 - p_0^2 + 2m^2 g x \sin \alpha]^{3/2}}{3m^2 g \sin \alpha}.$$

7. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для математического маятника и его закон движения в квадратуре. *Ответ:*

$$S = -E_0 t + \int \sqrt{2ml^2(E_0 + mgl \cos \varphi)} d\varphi,$$

$$t - t_0 = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{2ml^2}{(E_0 + mgl \cos \varphi)}} d\varphi.$$

8. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле (в декартовых координатах). Найти также закон движения электрона и его траекторию. *Указание:* выбрать векторный потенциал в виде $\vec{A} = -\mathcal{H} y \vec{n}_x$. *Ответ:*

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 z + \int \sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} \mathcal{H} y\right)^2} dy,$$

$$x = x_0 + \frac{p_{\perp c}}{e_0 \mathcal{H}} \cos \omega(t - t_0), \quad y = y_0 - \frac{p_{\perp c}}{e_0 \mathcal{H}} \sin \omega(t - t_0), \quad z = z_0 + \frac{\alpha_2}{m} (t - t_0),$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{c p_{\perp}}{e_0 \mathcal{H}} \right)^2,$$

где $\omega = e_0 \mathcal{H} / mc$, $y_0 = \alpha_1 c / e_0 \mathcal{H}$, $p_{\perp} = \sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2}$, $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$, $e_0 = -e$ (e — заряд электрона).

9. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для заряда, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле \mathcal{H} (в цилиндрических координатах). Получить закон движения и траекторию в квадратурах. *Указание:* выбрать векторный потенциал в виде $\vec{A} = -\frac{\mathcal{H}}{2} r \vec{n}_{\varphi}$. *Ответ:*

$$S = -E_0 t + \alpha_1 \varphi + \alpha_2 z + \int \sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{e_0}{2c} \mathcal{H} r \right)^2} dr,$$

$$t - t_0 = \int \frac{m dr}{\sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{e_0}{2c} \mathcal{H} r \right)^2}},$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{e_0}{2c} \mathcal{H} r \right)^2 dr}{\sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{e_0}{2c} \mathcal{H} r \right)^2}},$$

$$z - z_0 = \int \frac{\alpha_2 dr}{\sqrt{2mE_0 - \alpha_2^2 - \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{e_0}{2c} \mathcal{H} r \right)^2}}.$$

10. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для электрона, движущегося во взаимно-перпендикулярных постоянных и однородных электрическом $\vec{\mathcal{E}}$ и магнитном $\vec{\mathcal{H}}$ полях. *Указание:* $\vec{A} = -\mathcal{H} y \vec{n}_x$, $\varphi = -\mathcal{E} y$. *Ответ:*

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 z + \int \sqrt{2m(E_0 - e_0 \mathcal{E} y) - \alpha_2^2 - \left(\alpha_1 - \frac{e_0}{c} \mathcal{H} y \right)^2} dy.$$

11. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для заряда, движущегося в поле волны с векторным потенциалом $\vec{A}(t) = \vec{a} \cos \omega t$. Найти закон движения заряда. *Ответ:*

$$S = \vec{\alpha} \vec{r} - \frac{1}{2m} \int \left(\vec{\alpha} - \frac{e}{c} \vec{a} \cos \omega t \right)^2 dt, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{m} \left(\vec{\alpha} t - \frac{e}{\omega c} \vec{a} \sin \omega t \right)^2.$$

12. Однородный стержень массы m скользит по гладкой вертикальной плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (I — главный центральный момент стержня). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для стержня. Определить закон движения. *Указание:* рассмотрение проводить в движущейся вместе с плоскостью системе координат, ось Oy направить вниз по оси вращения, ось Ox — вдоль плоскости, через x и y обозначить координаты центра масс стержня на вращающейся вертикальной плоскости, через θ — угол наклона стержня к горизонтальной плоскости. *Ответ:* функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{p_\theta^2}{I/m} \right) - \frac{m\omega^2}{2} \left(\frac{I}{m} \cos^2 \theta + x^2 \right) - mgy;$$

полный интеграл

$$S = -H_0 t + \int \sqrt{m^2 \omega^2 x^2 + 2\alpha_1} dx + \int \sqrt{2m^2 gy + 2\alpha_2} dy + \\ + \sqrt{\frac{I}{m}} \int \sqrt{Im\omega^2 \cos^2 \theta + 2mH_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2} d\theta;$$

закон движения центра масс стержня

$$x = \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{2mg} (e^A + e^{-A}), \quad y = \frac{g}{2} t^2 + Bt + \frac{B^2}{2g} - \frac{\alpha_2}{gm^2},$$

где $A = \omega(t + B/g)$, $B = g(m\beta_2 - t_0)$; закон вращения стержня относительно центра масс определяется из выражения

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{I}{m}} \int \frac{m d\theta}{\sqrt{Im\omega^2 \cos^2 \theta + 2mH_0 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2}}.$$

13. По известной функции Лагранжа $\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 q_1^4 + \dot{q}_2^2 q_2^2) - \frac{q_2^2}{q_1^2}$ составить уравнение Гамильтона–Якоби, найти его полный интеграл и уравнения движения в квадратурах.
14. По известной функции Лагранжа $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2 q_1^2}{q_2^2} \right)$ составить уравнение Гамильтона–Якоби, найти его полный интеграл и уравнения движения в квадратурах.

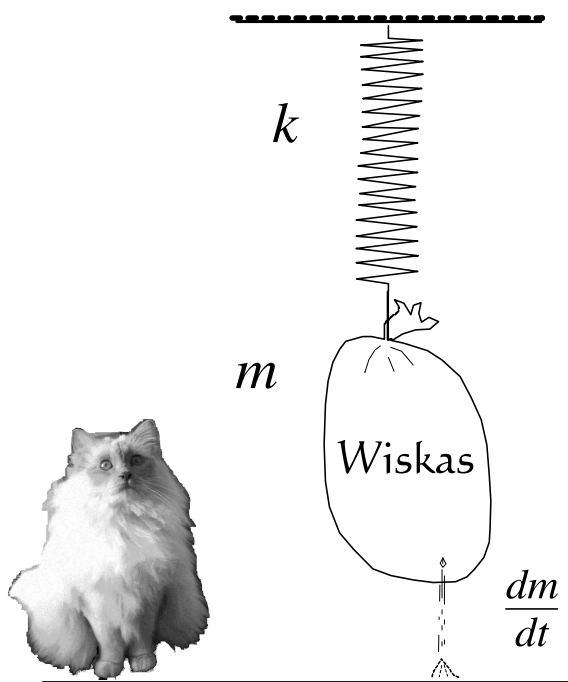


Рис. 4.1. Для любого математического маятника адиабатический инвариант равен $I = E/\omega$, $\omega = 2\pi/\tau$.

15. Методом разделения переменных найти общее решение уравнения движения заряда e в поле электрического диполя $U = e \frac{\vec{a} \vec{r}}{r^3}$ (\vec{a} — момент диполя). *Указания:* построить функцию Гамильтона в сферической системе координат; решение уравнения Гамильтона–Якоби искать в виде $S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi)$.

4.3. Адиабатические инварианты

4.3.1. Теория

Пусть система совершает одномерное финитное движение и один из ее параметров λ медленно (адиабатически) меняется со временем, так что $\tau \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda$ (τ — период движения). В результате полная механическая энергия такой системы будет меняться со временем $E(t)$. Но оказывается, что существует такая величина, которая остается постоянной при движении системы и ее называют адиабатическим инвариантом J :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (4.10)$$

интеграл по замкнутому контуру берется по траектории движения при постоянных λ и E .

4.3.2. Задачи

1. На пружине висит мешок массы $m = 50$ кг. Жесткость пружины k (рис. 4.1). Содержимое мешка высыпается на землю ($\frac{dm}{dt} = 100$ г/мин). Чему равен адиабатический инвариант для такого осциллятора? При каких значениях k справедлив Ваш результат?
2. Планета массы m движется вокруг звезды массы M по эллипсу с полуосями a и b . Предполагая, что вследствие излучения масса звезды медленно уменьшается, найти адиабатические инварианты движения планеты. *Ответ:* $E/M^2 = \text{const}$, $Ma = \text{const}$ и $Mb = \text{const}$. Поскольку величины aM и bM адиабатически сохраняются, орбита планеты остается подобной.
3. Дана система двух тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Предполагая, что гравитационная постоянная $G(t)$ — медленная функция времени³, найти адиабатические инварианты системы. *Ответ:* $E/G^2 = \text{const}$, $Ga = \text{const}$ и $Gb = \text{const}$.
4. Частица движется в стационарном неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле с напряженностью \mathcal{H}_z , возрастающей вдоль оси z . Предполагая, что $R \left| \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} \right| \ll |\mathcal{H}_z|$ (R — радиус орбиты частицы), найти адиабатический инвариант движения. *Ответ:* $\frac{m v_{\perp}^2}{2\mathcal{H}} = \text{const}$.
5. На нити, пропущенной через колечко A (см. рис. 4.2), подвешена частица массы m . Определить среднюю силу, действующую на колечко A со стороны нити при малых колебаниях маятника. Найти изменение энергии маятника при медленном вертикальном перемещении колечка. *Ответ:* $E^2 |AB| = \text{const}$.
6. Шарик, находящийся в лифте, подскакивает над упругой плитой. Как изменяется максимальная высота, на которую поднимается шарик, когда ускорение лифта медленно изменяется? Как меняется высота, если плита медленно поднимается? *Ответ:* $h \propto g^{-1/3}$ (g — ускорение свободного падения).
7. Как изменяется энергия частицы в поле U при медленном изменении параметров поля (A, α, U_0, n)? а) $U = A (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$; б) $U = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(\alpha x)}$; в) $U = U_0 \text{tg}(\alpha x)$; г) $U = A |x|^n$. *Указание:* использовать

³Подчеркнем, что в настоящее время все экспериментальные данные свидетельствуют о неизменности фундаментальной величины G .

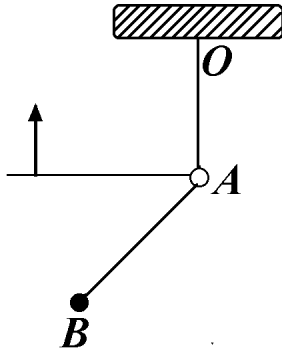


Рис. 4.2. К задаче 5

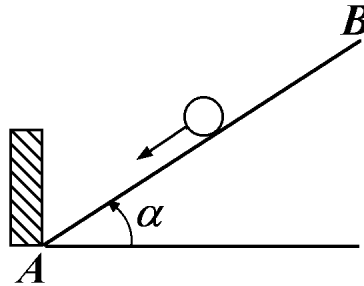


Рис. 4.3. К задаче 8

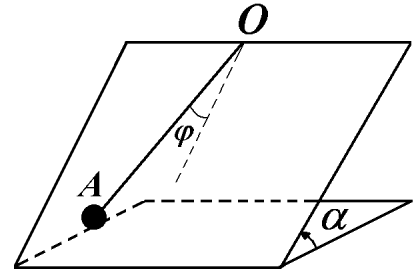


Рис. 4.4. К задаче 9

формулу $\tau = 2\pi \frac{\partial J}{\partial E}$. Ответ:

$$a) E = -A \left(1 - \frac{\alpha J}{\sqrt{2mA}}\right)^2; \quad б) E = -U_0 \left(1 - \frac{\alpha J}{\sqrt{2mU_0}}\right);$$

$$в) E = \alpha J \sqrt{\frac{2U_0}{m} + \frac{\alpha J^2}{2m}}; \quad г) E = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2m}} \frac{J}{2} A^{1/n} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\frac{2n}{n+2}}.$$

8. Частица движется по наклонной плоскости AB (см. рис. 4.3), упруго отражаясь от стенки в точке A . Найти, как изменяется максимальная высота подъема частицы при медленном изменении угла α . Ответ: $h \propto (\sin \alpha)^{2/3}$.
9. Как изменяется амплитуда колебаний маятника OA (см. рис. 4.4), находящегося на наклонной плоскости, при медленном изменении угла α . Ответ: $\varphi \propto (\sin \alpha)^{-1/4}$.
10. Найти адиабатический инвариант для математического маятника, не предполагая колебания малыми (φ_0 — максимальный угол отклонения). Ответ:

$$J = \frac{8ml\sqrt{gl}}{\pi} \left[E\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right) - \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right) \right],$$

здесь K и E — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

11. На осциллятор действует сила $F(t)$. Найти зависимость адиабати-

ческого инварианта $J = \frac{1}{2} \oint p dq$ от времени. *Ответ:*

$$J(t) = J(0) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega^2} \int_0^t F \sin \omega t dt - \frac{1}{\omega} \left[x(0) - \frac{F(0)}{m\omega^2} \right] \int_0^t F \cos \omega t dt + \frac{1}{2m\omega} \left| \int_0^t \dot{F} e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

12. Найти связь между объемом и давлением “газа”, состоящего из частиц, которые движутся параллельно ребрам внутри куба, объем которого медленно изменяется. *Ответ:* $PV^{5/3} = \text{const}$.

13. Частица движется внутри упругого параллелепипеда. Как изменяется энергия частиц, если размеры параллелепипеда медленно изменяются. *Ответ:*

$$E = \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{I_1^2}{a^2} + \frac{I_2^2}{b^2} + \frac{I_3^2}{c^2} \right),$$

где a, b, c — длины ребер параллелепипеда, а $I_i = \text{const}$.

14. Частица движется внутри сферы с упругими стенками, радиус R которой медленно изменяется. Как изменится при этом энергия частицы E и угол α , под которым она налетает на стенку? *Ответ:*

$$ER^2 = \text{const}, \quad \sin \alpha = \frac{L}{R\sqrt{2mE}} = \text{const}.$$

здесь $L \equiv L_z$ — момент импульса, который строго сохраняется.

15. Как изменяется энергия и траектория частицы, совершающей финитное движение в поле $U(\vec{r})$ при медленном изменении коэффициента γ ? а) $U = -\gamma r^{-n}$ $0 < n < 2$; б) $U = \frac{\vec{a}\vec{r}}{r^3} + \frac{\gamma}{r^4}$. *Ответ:*

$$\text{а) } E \propto \gamma^{2/(2-n)}; \quad \text{б) } E \propto \gamma^{-1}.$$

16. Найти изменение энергии частицы в центральном поле при медленном “включении” малой добавки к полю $\delta U(r)$. *Ответ:*

$$\delta E = \langle \delta U \rangle = \frac{2}{\tau} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta U m r dr}{\sqrt{2mr^2(E - U) - L^2}}.$$

17. Определить границы области, в которой движется между двумя упругими поверхностями $y = 0$ и $y = \frac{a \operatorname{ch}(\alpha x)}{\operatorname{ch}(2\alpha x)}$ частица, вылетевшая из начала координат под углом φ к оси y в плоскости xy

($\alpha, \varphi \ll 1$), и период колебаний вдоль оси x . *Ответ:*

$$\operatorname{tg}(\alpha x_{max}) = \operatorname{tg} \varphi, \quad \tau = \frac{2\pi}{\alpha v \sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

18. Как изменятся радиус и положение центра орбиты заряженной частицы (заряд e) при движении в однородном магнитном поле с напряженностью \mathcal{H} , медленно изменяющимся по величине? *Указание:* векторный потенциал выбрать в виде $\vec{A} = (0, \mathcal{H}x, 0)$. *Ответ:*

$$J = \frac{2mE - p_z^2}{2m\omega} \propto \frac{v_{\perp}^2}{\mathcal{H}} \propto \pi a^2 \mathcal{H},$$

где $\omega = e\mathcal{H}/(mc)$, $a = ctv_{\perp}/e\mathcal{H}$ — радиус орбиты частицы, c — скорость света, m — масса частицы, v_{\perp} — перпендикулярная к полю компонента скорости частицы. Следовательно $a \propto \mathcal{H}^{-1/2}$, а расстояние центра орбиты от плоскости yz равно $x_0 = cp_y/e\mathcal{H}$.

19. Вычислить адиабатические инварианты для заряженного осциллятора с собственной частотой ω в однородном магнитном поле. *Указание:* выбрать векторный потенциал в виде $A_{\varphi} = r\mathcal{H}(t)/2$, $A_r = A_z = 0$. *Ответ:*

$$J_r = J_r \left(p_{\varphi}, \frac{2mcE_{\perp} + e\mathcal{H}p_{\varphi}}{c\sqrt{\omega^2 + (e\mathcal{H}/mc^2)^2}} \right), \quad J_{\varphi} = p_{\varphi}, \quad J_z = \frac{E_z}{\omega},$$

таким образом, $E_z \propto \omega$, $E_{\perp} + \frac{e\mathcal{H}p_{\varphi}}{2mc} \propto \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathcal{H}}{2mc}\right)^2}$.

20. Найти период колебаний электрона вдоль оси в магнитной ловушке. Магнитное поле ловушки симметрично относительно оси z , причем $\mathcal{H}_{\varphi} = 0$, $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_z(z)$, $\mathcal{H}_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_z(z)}{\partial z}$: а) $\mathcal{H}_z(z) = \mathcal{H}_0 \left(1 + \lambda \operatorname{th}^2 \frac{z}{a}\right)$; б) $\mathcal{H}_z(z) = \mathcal{H}_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)$. *Ответ:*

$$а) \tau = \frac{2\pi a}{v \sqrt{\lambda \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}; \quad б) \tau = \frac{2\pi a}{v \sin \alpha},$$

где α — угол между скоростью частицы \vec{v} и осью z в начале координат.

21. Как изменяются энергия электрона и период его колебаний вдоль оси z в магнитной ловушке, описанной в предыдущей задаче при медленном изменении параметров поля \mathcal{H}_0 , λ , a ? *Ответ:*

$$а) a^2 (\lambda E_{\perp} - E_z) = \operatorname{const}, \quad б) E_z \sqrt{\mathcal{H}_0}/a = \operatorname{const},$$

причем $E = E_{\perp} + E_z$, $E_{\perp}/\mathcal{H}_0 = \operatorname{const}$.

Глава 5

Основы механики сплошной среды

Для описания движения большого коллектива частиц методы классической механики уже не применимы не только из-за технической проблемы решения огромной совокупности дифференциальных уравнений движения частиц за разумный срок, но и из-за невозможности поставить точные начальные условия для каждой частицы. Для изучения больших ансамблей частиц используют, в основном, две математические модели — газокINETическую и феноменологическую (модель сплошной среды).

Определим модель *жидкой сплошной среды*. Систему из большого числа взаимодействующих частиц можно характеризовать следующими параметрами: τ — характерный промежуток времени между столкновениями частиц, l — длина их свободного пробега между столкновениями, L — характерный пространственный масштаб задачи (например, размер системы), T — характерный временной масштаб задачи (например, время изменения макроскопических параметров системы). Модель сплошной среды применима, если выполняются условия: $\tau \ll T$, $l \ll L$. Такую среду будем называть “жидкостью”, в действительности она может являться газом, водой, плазмой, смолой, расплавленным металлом и т.д. Будем рассматривать *жидкую частицу* объемом $V(t) \sim \lambda^3$, которая содержит много атомов или молекул и для нее выполняется $l \ll \lambda \ll L$.

Для полной массы m и импульса \vec{P} частиц, содержащихся в объеме V , определим средние плотность $\langle \rho \rangle$ и скорость $\langle \vec{u} \rangle$ этой жидкой частицы:

$$\langle \rho \rangle = \frac{m}{V}, \quad \langle \vec{u} \rangle = \frac{\vec{P}}{m}. \quad (5.1)$$

Для энергии имеем

$$E = \langle \rho \rangle \left\{ \frac{1}{2} |\langle \vec{u} \rangle|^2 + \langle \varepsilon \rangle \right\} V, \quad (5.2)$$

где $\langle \varepsilon \rangle = \epsilon/m$ — средняя плотность внутренней энергии на единицу массы, ϵ — внутренняя энергия объема V , заключенная в хаотическом движении молекул и во внутримолекулярных движениях.

В рамках феноменологической теории предполагается, что при уменьшении объема V средние величины $\langle \rho \rangle$, $\langle \vec{u} \rangle$, $\langle \varepsilon \rangle$ имеют соответ-

ствующие конечные пределы $\varrho(\vec{r}, t)$, $\vec{u}(\vec{r}, t)$, $\varepsilon(\vec{r}, t)$, зависящие от координат \vec{r} и времени t . Тогда для жидкой частицы масса, импульс и энергия определяются соответственно интегралами:

$$m = \int_{V(t)} \varrho dV, \quad \vec{P} = \int_{V(t)} \varrho \vec{u} dV, \quad E = \int_{V(t)} \varrho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) dV. \quad (5.3)$$

В процессе движения объем $V(t)$ должен деформироваться таким образом, чтобы реальные частицы, заключенные первоначально в нем, не покидали бы его, а новые извне — не добавлялись.

Газокинетическая модель используется, как правило, для описания процессов в случае $L \lesssim l$ и $T \lesssim \tau$, что характерно для разреженных газа и плазмы. В основе газокинетической модели лежит кинетическое уравнение.

5.1. Идеальная среда. Уравнения гидродинамики

5.1.1. Теория

Законы сохранения в интегральной форме. В основе простейшей модели сплошной среды лежат законы сохранения массы вещества, импульса и энергии. Запишем их в интегральном представлении:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho dV = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho \vec{u} dV = - \oint_{\Sigma(t)} p \vec{n} d\Sigma + \int_{V(t)} \varrho \vec{f} dV, \quad (5.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \varepsilon \right) dV = - \oint_{\Sigma(t)} p \vec{n} \vec{u} d\Sigma + \int_{V(t)} \varrho \vec{f} \vec{u} dV, \quad (5.6)$$

где $\varrho(\vec{r}, t)$ — объемная плотность, $\vec{u}(\vec{r}, t)$ — скорость, $p(\vec{r}, t)$ — давление, $\vec{f}(\vec{r}, t)$ — плотность внешних объемных сил, $V(t)$ — макроскопический объем жидкости, которая может деформироваться в процессе движения произвольным образом, $\Sigma(t)$ — поверхность, окружающая $V(t)$, $\vec{n}(t)$ — внешняя нормаль к $\Sigma(t)$, ε — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы. К уравнениям (5.4) – (5.6) необходимо добавить уравнение состояния, т.е. задать связь между термодинамическими параметрами

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \varrho). \quad (5.7)$$

Например, для идеального газа

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (5.8)$$

для воды в океане хорошим приближением является закон Коула

$$\frac{p + B}{1 + B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n, \quad (5.9)$$

p измеряется в атмосферах, ρ_0 — плотность при атмосферном давлении, $n = 7$, $B = 3000$ атм.

Законы сохранения в дифференциальной форме. Для вычисления полной производной по времени от интегралов в (5.4) – (5.6) воспользуемся формулой

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{r}, t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} F + F \operatorname{div} \vec{u} \right] dV, \quad (5.10)$$

которая справедлива для произвольной тензорной функции F . Формула (5.10) легко получается, если воспользоваться определением производной с учетом зависимости V от времени

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{r}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V(t+\Delta t)} F(\vec{r}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} F(\vec{r}, t) dV \right\}. \quad (5.11)$$

Соотношение (5.10) позволяет записать законы сохранения в дифференциальной форме. Уравнение (5.4) дает *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (5.12)$$

Из (5.5) с учетом (5.12) получаем уравнение Эйлера¹

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}. \quad (5.13)$$

Для плотности внутренней энергии имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \varepsilon + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (5.14)$$

¹Леонард Эйлер (1707–1783) — великий математик, физик, механик. Эйлер отличался несравненной работоспособностью и за свою жизнь написал около 900 (!) научных работ. С 1725 г. по 1740 г. работал в России в Петербурге в Академии наук. В 1766 г. возвратился в Петербург, где жил и работал до своей смерти.

Систему уравнений (5.12) – (5.14) обычно называют уравнениями гидродинамики. Эти уравнения не учитывают диссипативные эффекты (трение, теплопроводность, излучение), поэтому такую сплошную среду называют *идеальной*.

Как видим, в уравнениях гидродинамики в данном подходе возникает полная производная по времени от различных физических величин

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}), \quad (5.15)$$

которую называют также континуальной или эйлеровой.

В декартовой системе координат $x_i = \{x, y, z\}$ ($i = 1, 2, 3$) для компонент уравнения Эйлера имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad (5.16)$$

где по индексу k подразумевается суммирование (см. подробнее в гл. 7).

Закон сохранения энергии. В случае идеального газа (5.8) уравнение для плотности внутренней энергии (5.14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} p + \gamma p \vec{\nabla} \vec{u} = 0. \quad (5.17)$$

В общем случае, если воспользоваться вторым началом термодинамики

$$T ds = d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (5.18)$$

то закон сохранения энергии (5.14) можно записать относительно удельной энтропии s

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} s = 0. \quad (5.19)$$

Энтропия жидкой частицы сохраняется в процессе движения. Для идеального газа (5.8) выполняется $s \propto \ln(p/\rho^\gamma)$.

Несжимаемая среда. Для несжимаемой среды выполняется

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \right) \rho = 0 \quad (5.20)$$

и, следовательно, уравнение непрерывности (5.12) принимает простой вид:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (5.21)$$

Уравнение Бернулли². Для стационарного $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, изэнтропичного течения справедлива формула Бернулли

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2} + w + U = B_l, \quad (5.22)$$

где B_l — постоянная Бернулли для фиксированной линии тока, U — потенциал, w — энтальпия, для которой имеем $dw = T ds + dp/\rho$. Отметим, что соотношение (5.22) выполняется для безвихревого течения.

Самогравитирующая среда. Гравитационное поле $\Phi(\vec{r})$ обусловлено распределением массы в пространстве $\rho(\vec{r})$. Эта связь определяется уравнением Пуассона³

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \quad (5.23)$$

Самогравитацией можно пренебречь при выполнении условия

$$L^2 \ll \lambda_J^2 \equiv \frac{c_s^2}{4\pi G\rho}, \quad (5.24)$$

где L — характерный масштаб системы или неоднородности (например, длина волны возмущения), величину λ_J называют джинсовским масштабом.

Подход Лагранжа. Выше мы рассматривали распределения функций p , ρ , ε , \vec{u} в пространстве и их изменение со временем. Тем самым, мы следили не за судьбой каждой индивидуальной “жидкой” частицы, а за изменением характеристик потока в конкретных точках пространства. Такой подход к изучению движения сплошной среды называют Эйлеровым. В рамках Лагранжевого подхода наблюдение ведется за фиксированной жидкой частицей и изучается изменение со временем ее параметров (плотности, скорости, давления). В первом случае независимыми переменными являются пространственные координаты и время, во

²Даниил Бернулли (1700–1782) занимался физиологией и медициной, но больше всего математикой и механикой. В 1725–33 он работал в Петербургской АН сначала на кафедре физиологии, а затем механики. В работах, завершённых написанным в Петербурге трудом “Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей” (1738 г), вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Даниил Бернулли разрабатывал кинетические представления о газах.

³ПУАССОН Симеон Дени (1781–1840) — французский математик, механик, физик. Основные труды относятся к теоретической и небесной механике, математической физике. В теории потенциала ввёл так называемое уравнение Пуассона (1811) и применил его к решению задач по гравитации и электростатике. Решил ряд задач теории упругости. Исследовал вопросы теплопроводности, магнетизма, капиллярности и др. Термины “скобки Пуассона” (теория дифференциальных уравнений), “коэффициент Пуассона” (теория упругости), “интеграл Пуассона” (интегральное исчисление), “распределение Пуассона” (теория вероятности) и т.д. свидетельствуют о достижениях этого ученого.

втором — “номера” жидких частиц и время. В качестве “номеров” жидких частиц обычно используют значения их пространственных координат \vec{r}_0 в начальный момент времени $t = 0$. Тем самым координаты жидкой частицы в произвольный момент времени $t \neq 0$ являются функцией ее начальных координат и времени

$$\vec{r} = \vec{f}(\vec{r}_0, t). \quad (5.25)$$

Фиксируя t и рассматривая \vec{f} как функцию переменной \vec{r}_0 , мы получаем распределение всех жидких частиц по пространству в произвольный момент $t \neq 0$. Якобиан преобразования координат

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \quad (5.26)$$

в любой момент времени должен быть конечным и не равным нулю (это условие может нарушаться в моделях пылевой среды, где $p = 0$). Совокупность жидких частиц, занимавшая объем dV_0 в момент $t = 0$ будет занимать объем $dV(t) = J(t) dV_0$ в произвольный момент $t > 0$. С учетом (5.4) получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \varrho J dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\varrho J) dV_0 = 0. \quad (5.27)$$

В результате, с учетом произвольности объема V_0 , имеем уравнение непрерывности в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} (\varrho J) = 0. \quad (5.28)$$

Уравнения (5.5), (5.6) с учетом (5.28) дают дополнительно

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\varrho} \vec{\nabla} p, \quad (5.29)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \vec{u}, \quad (5.30)$$

где производные в правых частях уравнений берутся по эйлеровым координатам.

Уравнения гидродинамики в лагранжевых массовых переменных. В рамках лагранжева подхода иногда удобно использовать так называемые “массовые” переменные. Ограничимся рассмотрением одномерного течения. Считаем, что имеется одна неподвижная точка x_0 и

пусть вся жидкость находится справа от точки x_0 . Введем массовую переменную

$$m = \int_{x_0}^x \varrho(x', t) dx'. \quad (5.31)$$

В случае $J \neq 0$ (5.31) устанавливает взаимно однозначное соответствие между m и x , что приводит к замене переменных $\frac{\partial}{\partial x} = \varrho \frac{\partial}{\partial m}$. Используя (5.15), из уравнений гидродинамики в эйлеровой форме получим следующую систему газодинамических уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varrho} \right) = \frac{\partial u}{\partial m}; \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial m}; \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \frac{\partial u}{\partial m}, \quad (5.32)$$

которую необходимо дополнить уравнением состояния газа. Полные производные по времени слева в (5.32) являются производными вдоль траектории частицы. В лагранжевом подходе этот же смысл имеют частные производные по времени. Тем самым, в левых частях уравнений (5.32) полные производные по t можно заменить на частные.

5.1.2. Задачи

1. Определить распределение давления $p(z)$ в атмосфере идеального газа в поле тяжести Земли при произвольном распределении температуры $T(z)$. Получить профиль плотности в случае постоянной температуры. *Ответ:* $p(z) = p_0 \exp \left\{ -\frac{\mu g}{\mathcal{R}} \int_0^z \frac{dz}{T(z)} \right\}$, где \mathcal{R} — газовая постоянная. Для $T = \text{const}$ имеем $\varrho(z) = \varrho(z=0) \exp(-z/L)$ ($L = \mathcal{R}T/\mu g$ — шкала атмосферы, для Земли имеем $L \simeq 8$ км).

2. Чему равна масса земной атмосферы (см. задачу 5.1.2.1)? Какая часть массы воздуха находится в слое $0 \leq z \leq L$?

3. Определить распределение давления $p(z)$ в политропной атмосфере $p = p_0(\varrho/\varrho_0)^n$, находящейся в однородном поле тяжести Земли. Рассмотрите предельный переход $n \rightarrow 1$.

$$\text{Ответ: } p(z) = p_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\varrho_0}{p_0} gz \right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

4. Определить форму поверхности несжимаемой жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси ($\vec{n}_z \parallel \vec{g}$) с постоянной угловой скоростью Ω . Высота уровня жидкости в покоящемся сосуде равна H , радиус цилиндра R .

Ответ:
$$z = \frac{\Omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + H.$$

5. Найти распределение давления в газе, вращающемся внутри цилиндрической трубы с угловой скоростью $\Omega = \text{const}$.

Ответ:
$$p(r) = p(0) \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho(0)}{p(0)} \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

6. Как известно, за счет вращения Земли ($\Omega = 1/13700 \text{ c}^{-1}$), поверхность Земли является не сферой, а сфероидом — телом вращения, представляющим несколько сплюснутую у полюсов сферу. Найти относительную сплюснутость Земли $(R_{\text{max}} - R_{\text{min}})/R_{\text{min}}$.

Указания: 1) Землю считать однородным жидким телом; 2) принять гравитационное притяжение центральносимметричным. Ответ:
$$\frac{R_{\text{max}} - R_{\text{min}}}{R_{\text{min}}} = \frac{\Omega^2 R_0}{2g_0} \simeq \frac{1}{600},$$
 где индексом “0” обозначены величины на полюсах.

7. Тело с плотностью ρ_0 , немного превышающей плотность жидкости ρ , начинает тонуть. Показать, что начальное ускорение тела имеет порядок величины $\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} g$.

8. Найти форму свободной поверхности несжимаемой вращающейся жидкости, если частицы жидкости притягиваются к оси вращения с силой пропорциональной расстоянию до оси вращения $F = -m\beta r$.

9. По трубе переменного сечения течет стационарная несжимаемая идеальная жидкость в горизонтальном направлении. В точке с площадью сечения S_1 скорость равна v_1 , а давление p_1 . Определить как меняется давление при изменении площади сечения $S(x)$.

Ответ:
$$p(x) = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S(x)} \right)^2 \right].$$

10. Построить политропные модели гравитирующих газовых невращающихся шаров (звезд). Считать газ идеальным. Определить радиальные распределения давления и плотности.

11. Найти распределение давления и плотности в океане с глубиной. Указание: для воды можно воспользоваться формулой Коула

$(p + B)/(1 + B) = (\rho/\rho_0)^n$, давление p измеряется в атмосферах, ρ_0 — плотность при атмосферном давлении, $n = 7$, $B = 3000$ атм.

12. Вычислить силу, действующую на шар радиуса a , движущийся в несжимаемой идеальной жидкости в случае потенциального обтекания.

13. Цистерна движется по прямолинейному горизонтальному участку с постоянным ускорением a . Определить под каким углом α к горизонту установится свободная поверхность жидкости в цистерне.
Ответ: $\alpha = \arctg(a/g)$.

14. Емкость центрифуги в виде части кругового сектора угла 2α радиусов r и R ($R > r$) заполнена жидкостью на высоту H и вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Найти угловую скорость Ω , при которой жидкость будет выливаться из центрифуги. При решении задачи считать, что свободная поверхность жидкости в отклоненном положении не пересекает дно сосуда, а его высота равна h .
Ответ: $\Omega > \sqrt{\frac{4g(h - H)}{R^2 - r^2}}$.

15. По трубе, изогнутой по дуге окружности, протекает жидкость плотности ρ . Площадь поперечного сечения трубы равна S , модуль скорости частиц жидкости в каждом сечении одинаков и равен v . Определить силу давления жидкости N на стенки трубы вследствие поворота, считая, что размеры поперечного сечения трубы малы по сравнению с радиусом закругления.
Ответ: $N = \rho S v^2 \sqrt{2}$.

16. Вычислить полную энергию покоящейся изотермической атмосферы в рамках модели идеального газа (см. зад. 1).

17. При какой средней скорости движения воздуха кинетическая энергия атмосферы равна ее внутренней энергии.

Ответ: $v = c_s \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}}$, c_s — адиабатическая скорость звука.

18. Плоский слой газа находится в поле $U(x) = \alpha x^\beta$. Определить закон распределения термодинамических параметров вдоль x при различных β в случае модели идеального газа. Определить толщину слоя. Рассмотреть изотермический и изохорический случаи.

19. В шаре массой M_0 находится газ массой M . Шар (космический корабль) находится в вакууме. Возникла дырка размером ΔS . Через сколько времени давление снизится на 10 %? За какое время из шара выйдет весь воздух?
20. В задаче 19 определить скорость шара в результате вытекания газа.
21. Из цилиндрической бочки через маленькое отверстие внизу вытекает вода. Определить закон вытекания воды из бочки.
22. Бочка из предыдущей задачи стоит на тележке. Отверстие находится сбоку внизу. Найти закон движения тележки. Трением пренебречь.
23. Цилиндрический сосуд, наполненный водой, скользит без трения по наклонной поверхности. Из отверстия вблизи дна сосуда вытекает горизонтальная струя жидкости со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$, где h — высота (переменная) уровня жидкости в сосуде. Оценить зависимость ускорения сосуда от времени, если поперечное сечение площади сосуда S_1 и площади струи S_2 . Массой сосуда можно пренебречь.
24. Почему при сильном напоре воды садовый шланг извивается?
25. Пусть при некоторых условиях в сплошной среде выполняется закон сохранения величины $A \equiv \vec{u}^2 p + p \varepsilon$. Записать вытекающий из этого закона сохранения дифференциальное уравнение.
26. Судно имеет вертикальные боковые стенки. Площадь горизонтального сечения судна на уровне поверхности воды равна S , плотность воды ρ , масса судна m . Определить период малых вертикальных поступательных колебаний судна.
27. По трубе переменного сечения течет идеальная несжимаемая жидкость (рис. 5.1). Труба поворачивается на угол γ . Определить силу, действующую на изогнутый участок трубы.

Ответ:
$$F_x = -\frac{\rho u_2^2 S_2^2}{S_1} \sin \gamma, \quad F_y = \rho u_2^2 S_2 \left[0.5 \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} + 1 \right) - \frac{S_2}{S_1} \cos \gamma \right].$$

28. Жидкость вытекает из наклонного желоба с характерным размером R под действием силы тяжести. Показать, что расход жидкости пропорционален $R^{5/2}$.

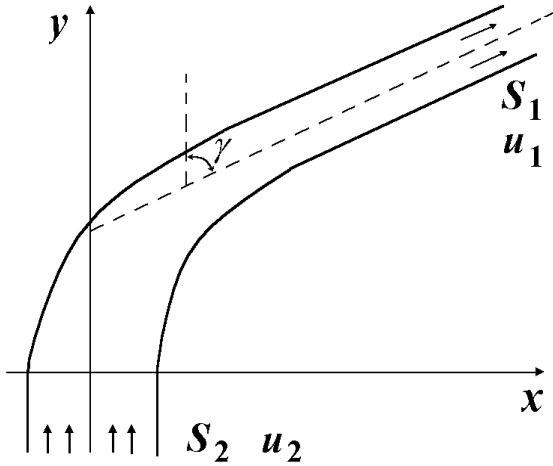


Рис. 5.1. К зад. 27

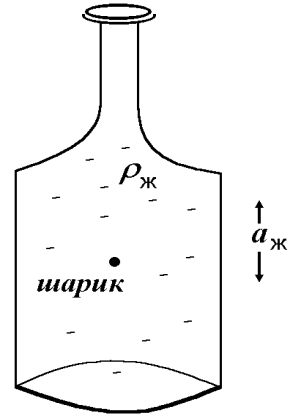


Рис. 5.2. К зад. 29

29. В сосуде находится идеальная несжимаемая жидкость плотности $\rho_{\text{ж}}$. Сосуд совершает колебания с амплитудой $a_{\text{ж}}$. В сосуде находится маленький шарик плотности ρ . Определить амплитуду колебаний шарика. *Ответ:* $a = a_{\text{ж}} \frac{3\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}} + 2\rho}$.

30. Определить силу, с которой тяжелая несжимаемая жидкость действует на погруженное в нее неподвижное тело. *Ответ:* В общем случае сила Архимеда ⁴ (сила, действующая на твердое тело, которое движется в идеальной жидкости) равна $\vec{F} = - \oint_S p d\vec{S}$, интегрирование проводится по всей поверхности тела. Придайте последней формуле вид, “известный” Архимеду.

5.2. Волны в идеальной жидкости

5.2.1. Теория

Равновесное течение будем характеризовать плотностью ρ_0 , давлением p_0 и скоростью \vec{u}_0 . Величины p_0 , ρ_0 , \vec{u}_0 удовлетворяют уравнениям (5.12), (5.13), (5.17). Рассмотрим малые возмущения на фоне равновесных параметров: $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0(\vec{r}) + \tilde{\vec{u}}(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \tilde{\rho}(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + \tilde{p}(\vec{r}, t)$. Все возмущенные величины будем отмечать значком “ \sim ”. Любое произвольное возмущение можно представить в виде набора плоских волн, различающихся длиной волны:

$$\tilde{f}_k(\vec{r}, t) = \tilde{f}(0, 0) \exp \left\{ -i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{r} \right\}. \quad (5.33)$$

⁴Архимед из Сиракуз (287–212 г. до н.э.) — легендарный персонаж Древней Греции

Уравнение, связывающее частоту ω с волновым вектором \vec{k} ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число), называется *дисперсионным уравнением*. Условие постоянства фазы волны $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const}$ дает фазовую скорость

$$\vec{V}_{ph}(\vec{k}) = \frac{\omega(\vec{k})}{k^2} \vec{k}. \quad (5.34)$$

Если $\omega/k = \text{const}$, то фазовая скорость не зависит от длины волны и форма волнового пакета не меняется со временем. Энергия волны распространяется с групповой скоростью

$$\vec{V}_g(\vec{k}) = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \vec{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z. \quad (5.35)$$

Ниже исследуем динамику возмущений малой амплитуды.

Акустические волны. Рассмотрим неподвижную $\vec{u}_0 = 0$, однородную $\rho_0 = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$ сжимаемую сплошную среду. В линейном приближении относительно возмущенных величин $\tilde{\rho}$, $\tilde{\vec{u}}$, \tilde{p} уравнения (5.12), (5.13), (5.17) принимают вид:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\tilde{\vec{u}}) = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial t} = -\frac{\nabla \tilde{p}}{\rho_0}, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = c_s^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}. \quad (5.38)$$

Систему уравнений (5.36)–(5.38) можно свести к волновому уравнению относительно давления

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \tilde{p}. \quad (5.39)$$

Поскольку в данном случае величина $c_s^2 = \gamma c_T^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ не зависит ни от координат, ни от времени, то решением (5.39) являются плоские монохроматические волны

$$\tilde{p}(\vec{r}, t) = \tilde{p}(0, 0) \cdot \exp\{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}\}. \quad (5.40)$$

Подставив (5.40) в (5.39), получим дисперсионное уравнение — связь между частотой звуковой волны и волновым вектором \vec{k} :

$$\omega^2 = k^2 c_s^2. \quad (5.41)$$

Внутренние гравитационные волны. Рассмотрим несжимаемую неподвижную среду во внешнем однородном гравитационном поле. Равновесие такой системы обеспечивается балансом силы тяжести и градиентом давления

$$\varrho_0(z) g = -\frac{dp_0}{dz}. \quad (5.42)$$

Запишем линеаризованные уравнения гидродинамики для возмущенных величин $\tilde{\varrho}$, \tilde{p} , \tilde{u}_z , $\tilde{\vec{u}}_\perp$ ($\tilde{\vec{u}}_\perp$ — возмущенная скорость в плоскости (x, y))

$$\vec{\nabla}_\perp \tilde{\vec{u}}_\perp + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} = 0, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial t} + \tilde{u}_z \frac{d\varrho_0}{dz} = 0, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{\vec{u}}_\perp}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \vec{\nabla}_\perp \tilde{p}, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\varrho_0 \partial z} + \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0^2} \frac{dp_0}{dz}. \quad (5.46)$$

Систему уравнений (5.43)–(5.46) с учетом (5.42) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \tilde{u}_z + \frac{d \ln \varrho_0}{dz} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \right) = g \frac{d \ln \varrho_0}{dz} \Delta_\perp \tilde{u}_z. \quad (5.47)$$

Если выполняется ВКБ-приближение (длина волны мала по сравнению с характерной шкалой неоднородности равновесной жидкости)

$$k_z L_\varrho \gg 1, \quad L_\varrho = |\partial \ln \varrho_0 / \partial z|^{-1}, \quad (5.48)$$

то решение (5.47) можно искать в виде (5.33), что приводит к дисперсионному уравнению для ВГ-волн

$$\omega^2 = -g \frac{d \ln \varrho_0}{dz} \frac{k_\perp^2}{k_\perp^2 + k_z^2}, \quad (5.49)$$

которые являются поперечными и, в отличие от 5.41, обладают дисперсией.

5.2.2. Задачи

1. Получить закон дисперсии звуковых волн в однородном потоке газа, который движется со скоростью \vec{u}_0 .
2. Найти собственную частоту колебаний поплавка. Геометрические размеры поплавка цилиндрической формы известны.

3. Найти собственную частоту колебаний раздела двух несжимаемых сред разной плотности в поле тяжести.
4. Изучить динамику малых возмущений тангенциального разрыва скорости. Среда несжимаемая, имеют соответствующие плотности ρ_{01} и ρ_{02} . Скорости движения сред вдоль горизонтальной оси x равны соответственно u_{01} и u_{02} . Силой тяжести пренебречь.

$$\text{Ответ: } \omega = k_x \frac{\rho_{01}u_{01} + \rho_{02}u_{02}}{\rho_{01} + \rho_{02}} \pm ik_x \frac{u_{01} - u_{02}}{\rho_{01} + \rho_{02}} \sqrt{\rho_{01}\rho_{02}}.$$

5. Определить собственную частоту колебаний поверхности бассейна с жидкостью (плотность ρ_{02}) глубина которого h_0 . Плотность атмосферного воздуха ρ_{01} . Определить скорость распространения волн и исследовать предельные случаи “глубокой” воды $kh_0 \gg 1$ и “мелкой” воды $kh_0 \ll 1$.

$$\text{Ответ: } \omega^2 = \frac{k_{\perp}g(\rho_{02} - \rho_{01})}{\rho_{01} + \rho_{02} \operatorname{cth}(k_{\perp}h_0)}, \text{ где } k_{\perp} \text{ — компонента, перпендикулярная ускорению свободного падения } \vec{g}.$$

6. Сравнить между собой скорости распространения звуковой волны параллельно плоскости Земли и вертикально вверх. Примите во внимание силу тяжести. При решении необходимо учесть, что длина звуковой волны существенно меньше 8 км, т.е. можно воспользоваться ВКБ-приближением.

7. Звуковая волна нормально отражается от границы раздела двух жидкостей с разными термодинамическими параметрами. Средняя плотность потока энергии в падающей звуковой волне равна \mathcal{E}_1 . Найти среднюю силу давления на единичную площадку границы раздела жидкостей. *Ответ:* $P = \frac{2\mathcal{E}_1}{c_{s1}} \cdot \frac{c_{s1}^2\rho_1^2 + c_{s2}^2\rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2c_{s1}^2}{(c_{s1}\rho_1 + c_{s2}\rho_2)^2}$.

8. Найти частоту звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника звука с постоянной скоростью (эффект Доплера).

9. В однородной среде с плотностью ρ_0 и равным нулю давлением (такую среду принято называть пылью) в начальный момент времени имеется возмущение скорости $u = u_0 \cdot \sin(kx)$. Определить эволюцию распределения плотности пыли $\rho(x, t)$. В какой момент происходит “опрокидывание” волны? *Указание:* рассмотреть нелинейные волны.

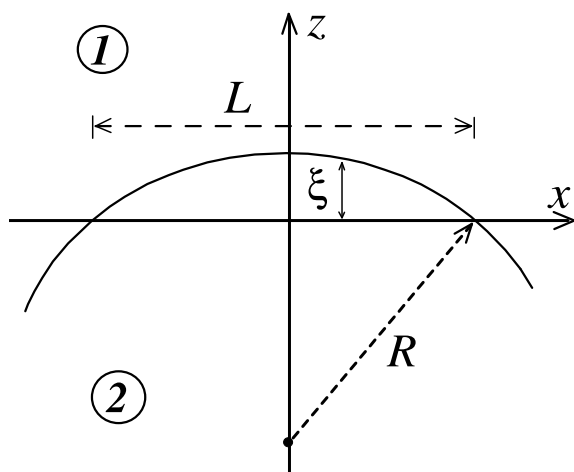


Рис. 5.3. К зад. 16. Отклонение от плоской границы между средами удобно характеризовать локальной величиной $\xi = \xi(x, t)$ (смещение дуги окружности от хорды). В общем случае выполняется

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} / \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}. \text{ При выполнении условия } L \ll R \text{ можно принять } \frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

10. На поверхности водоема находится рыболовный поплавок. Сколько колебаний совершит этот поплавок, если в результате прохождения катера по поверхности воды распространяется пакет гравитационных поверхностных волн, содержащий $N = 10$ горбов и впадин. *Ответ:* 20 колебаний.
11. На поверхность водоема падает камешек. От места падения начинают расходиться круговые гравитационные волны. Определить временную зависимость радиуса круга $R(t)$, определяющего область возмущения. *Ответ:* $R(t) \propto t^2$.
12. Определить частоту колебаний подвешенного на пружинке шарика массы m , который находится в идеальной жидкости с плотностью ρ . Шарик изготовлен из материала с плотностью ρ_0 . Сопротивление не учитывать.
13. Имеется закрытая с обоих концов прямая труба длиной L с идеальным газом. Она установлена вертикально в поле тяжести. Найти собственные частоты колебаний в газе.
14. Имеется граница раздела двух жидких сред, на которой скачком меняется плотность ρ и скорость звука c_s . Найти среднюю по времени силу давления на единицу площади границы раздела жидкостей при падении на нее монохроматической звуковой волны, если средняя плотность потока энергии в падающей звуковой волне равна q_1 .
15. Вычислить фазовую и групповую скорости для внутренних гравитационных волн. Обладают ли ВГ-волны дисперсией?
16. Определить закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн, которые распространяются на поверхности раздела двух сред с разной

плотностью ρ_{01} и ρ_{02} в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения на границе их раздела. Будем считать жидкость несжимаемой, коэффициент поверхностного натяжения равен α . Если характеризовать деформации границы раздела радиусами кривизны R_1 и R_2 , то равновесие деформированной поверхности обеспечивается разностью давлений $p_1 - p_2 = -\alpha(1/R_1 + 1/R_2)$ — закон Лапласа (рис. 5.3).

Ответ:
$$\omega^2 = \frac{k_{\perp} g (\rho_{02} - \rho_{01}) + \alpha k_{\perp}^3}{\rho_{01} + \rho_{02}}.$$

17. В зад. 16 учесть движение среды 1 $V_{01} = V_0 \neq 0$ в случае покоящейся второй среды ($V_{02} = 0$). При каких условиях волны могут быть неустойчивыми (так называемая неустойчивость Кельвина–Гельмгольца) Ответ:

$$\omega = \frac{\rho_{01} k_x V_0}{\rho_{01} + \rho_{02}} \pm \sqrt{kg \frac{\rho_{02} - \rho_{01}}{\rho_{02} + \rho_{01}} - k_x^2 V_0^2 \frac{\rho_{01} \rho_{02}}{(\rho_{02} + \rho_{01})^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho_{02} + \rho_{01}}}.$$

18. Получить дисперсионное уравнение для звуковых волн, распространяющихся в твердотельно вращающемся однородном самогравитирующем цилиндре. Считать, что длина волны мала по сравнению с расстоянием до центра. Рассмотреть волны с $k_z = 0$ в предположении, что центробежная сила скомпенсирована гравитационным притяжением к оси цилиндра. Определить условия при которых амплитуда волны нарастает из-за развития гравитационной неустойчивости.

19. Показать, что скорость частиц в звуковой волне, распространяющейся вверх в атмосфере, изменяется по закону $u \propto z^{-1} \exp\{mgz/2T\}$, т.е. сначала убывает, а затем возрастает (m — масса молекулы газа, z — высота над поверхностью Земли, g — ускорение свободного падения, температура газа T предполагается постоянной на всех высотах).

20. Получить дисперсионное уравнение малых колебаний сжимаемой покоящейся атмосферы в поле тяжести Земли $\Phi = gz$. Масштаб возмущений в вертикальном направлении мал по сравнению с масштабом вертикальной неоднородности L (для Земли $L = 8$ км, см. задачу 5.1.2.1 для $T = \text{const} = 300$ К). Ответ:

$$\omega^4 - \omega^2 \left\{ (k^2 + k_z^2) c_s^2 + \frac{g^2}{c_T^2} \right\} + (\gamma - 1) k^2 g^2 = 0. \quad (5.50)$$

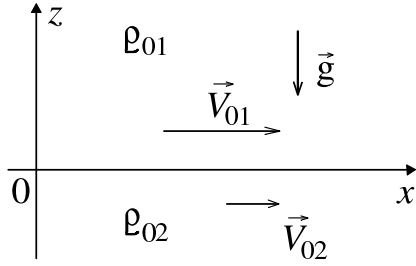


Рис. 5.4. Тангенциальный разрыв скорости, совмещенный с разрывом плотности во внешнем гравитационном поле.

21. Каким типам волн соответствуют колебания, динамика которых определяется уравнением (5.50)?
22. Получить дисперсионное уравнение колебаний границы раздела двух движущихся сред в поле тяжести Земли (рис. 5.4). *Ответ:*

$$\rho_{01} c_{s1}^2 (k^2 c_{s2}^2 - \hat{\omega}_2^2) (\alpha_1 \hat{\omega}_1^2 - gk^2) = \rho_{02} c_{s2}^2 (k^2 c_{s1}^2 - \hat{\omega}_1^2) (\alpha_2 \hat{\omega}_2^2 - gk^2), \quad (5.51)$$

где $\hat{\omega}_i = \omega - k_x V_{0i}$, $\alpha_i^2 = k^2 - \frac{\hat{\omega}_i^2}{c_{si}^2} + \frac{(1 - \gamma) k^2 g^2}{c_{si}^2 \hat{\omega}_i^2} + \gamma \frac{g^2}{c_{si}^4}$, $\text{Re}(\alpha_1) < 0$, $\text{Re}(\alpha_2) > 0$.

23. Рассмотреть задачу 5.2.22 в пределе $V_{01} = V_{02} = 0$ и несжимаемой среды $c_{si}^2 \rightarrow \infty$. Получить выражение для групповой скорости поверхностных гравитационных волн. При каких условиях возможны неустойчивые решения? *Ответ:* $V_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g(\rho_{02} - \rho_{01})}{k(\rho_{02} + \rho_{01})}}$.

24. Получить аналог критерия Рэлея для несжимаемой жидкости, вращающейся между двумя твердыми коаксиальными цилиндрами [25]. Рассмотрите только возмущения с $k_z = 0$. Исходные уравнения гидродинамики в цилиндрической системе координат можно найти в гл. 7.

5.3. Диссипативная среда

5.3.1. Теория

Уравнения (5.12)–(5.14) справедливы для идеальной среды. Наличие диссипативных эффектов (вязкости и теплопроводности) приводит к появлению дополнительных слагаемых. Уравнение непрерывности (5.12) не меняется. Уравнения Эйлера (5.13) дополняются слагаемыми с тензором вязких напряжений

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (5.52)$$

в результате получаем:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (5.53)$$

Величины η и ζ называют *коэффициентами динамической вязкости*. Уравнение (5.53) в приближении постоянных динамических коэффициентов вязкости принимает следующий вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f} + \nu \Delta \vec{u} + \left(\mu + \frac{\nu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \quad (5.54)$$

где $\nu = \eta/\rho$ и $\mu = \zeta/\rho$ — первая (сдвиговая) и вторая (упругая) кинематические вязкости соответственно. Уравнения типа (5.54) обычно называют уравнениями Навье-Стокса⁵. Уравнение (5.14), закон сохранения энергии, с учетом наличия диссипации записывается в следующем виде

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} s \right) = \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\alpha \vec{\nabla} T), \quad (5.55)$$

где s — энтропия, в соответствии с первым законом термодинамики $T ds = d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho$; T — температура, α — коэффициент теплопроводности.

В случае вязкого течения на твердой поверхности тангенциальная компонента скорости равна нулю (условие прилипания).

В несжимаемой среде выполняется $\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt}$. В результате уравнение (5.55) можно записать в форме

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla}(\alpha \vec{\nabla} T) + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (5.56)$$

В случае неподвижной жидкости, уравнение (5.56) приобретает простой вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\alpha \text{grad} T). \quad (5.57)$$

Если можно считать, что плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности являются константами, то уравнение (5.57) сводится к

⁵НАВЬЕ (Navier) Анри (1785–1836) — французский инженер и ученый (труды по строительной механике, сопротивлению материалов, теории упругости, гидравлике и гидромеханике; вывел (1822 г.) т.н. уравнения Навье-Стокса).

СТОКС (Stokes) Джордж Габриель (1819-1903), английский физик и математик. Разработал математическую теорию движения вязкой жидкости (уравнение Навье-Стокса, закон Стокса). Автор трудов по оптике, спектроскопии и люминесценции (правило Стокса), гравиметрии, векторному анализу (формула Стокса). Единица кинематической вязкости в СГС системе единиц названа по имени Стокса — обозначается Ст (1 Ст=1 см²/с).

уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (5.58)$$

где величину $\chi = \kappa / \rho c_p$ называют коэффициентом температуропроводности.

5.3.2. Задачи

1. Найти профиль скорости потока вязкой жидкости в цилиндрической трубе длины l и зависимость расхода жидкости Q от радиуса трубы R . *Ответ:* $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$, $Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} R^4$, здесь $\Delta p = p(0) - p(l)$ — разность давлений на концах трубы.

2. Вязкая жидкость течет вдоль оси двух коаксиальных труб радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) в зазоре между ними. Найти профиль скорости и зависимость расхода жидкости Q в таком потоке. *Ответ:* $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left(R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2} \right)$, $Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} \left(R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \right)$.

3. Найти профиль скорости потока вязкой жидкости в трубе эллиптического сечения длины l и зависимость расхода жидкости Q .

$$\text{Ответ: } v(y, z) = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad Q = \frac{\pi \Delta p}{4\nu l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

здесь a и b — полуоси эллипса.

4. Определить профиль скорости и давления вязкой жидкости, стекающей в длинном лотке. Ширина лотка велика по сравнению с глубиной потока h . Лоток наклонен к горизонту под углом α . Определить количество жидкости, стекающее за единицу времени.

$$\text{Ответ: } v(x, z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z(2h - z), \quad p(x, z) = p_0 + \rho g \cos \alpha (h - z),$$

$$Q = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{3\nu}, \quad \text{где } p_0 \text{ — атмосферное давление.}$$

5. Определить профиль скорости несжимаемой вязкой жидкостим сквозь трубу прямоугольного сечения при наличии перепада давления. *Ответ:* $v(y, z) = \frac{\Delta p}{4\eta l} [y(a - y) + z(b - z)]$.

6. Определить распределение давления и скорости для стационарного вязкого несжимаемого течения между параллельными неподвижными плоскостями при наличии перепада давления.

$$\text{Ответ: } \frac{dp}{dx} = \text{const}, \quad v(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y(h-y).$$

7. Рассмотреть течение между параллельными плоскостями (расстояние между ними равно h), движущимися относительно друг друга со скоростью u . Определить распределение давления и скорости.

$$\text{Ответ: } p = \text{const}, \quad v(y) = -\frac{u}{h} y.$$

8. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси. Определить движение жидкости, заполняющей пространство между ними.

$$\text{Ответ: } p = \text{const}, \quad v(r) = \frac{u}{\ln(R_1/R_2)} \ln \frac{r}{R_2}.$$

9. Вязкая жидкость прилегает к плоскости ($x, y, z = 0$), колеблющейся в направлении оси x с амплитудой скорости u_0 и частотой ω . Найти закон движения жидкости в полупространстве $z > 0$.

10. Вязкая жидкость прилегает к плоскости ($x, y, z = 0$), колеблющейся в направлении оси z с амплитудой скорости u_0 и частотой ω . Найти закон движения жидкости.

11. Вязкая жидкость движется между двумя параллельными плоскостями. Одна стенка покоится, другая движется со скоростью u_0 . Найти профиль течения, определить среднюю скорость течения, расход жидкости, силу трения, действующую на единицу площади стенки.

12. Шарик диаметром d падает с высоты h в атмосфере Земли. Определить отклонение от вертикали, обусловленное вращением Земли. Сделать оценку с учетом силы трения Стокса. *Указание:* при движении шарика в жидкости с небольшой скоростью d на него действует сила сопротивления $F = 6\pi\eta v d$.

13. Определить закон движения в атмосфере шарика диаметром d , подвешенного на нити длиной l . Начальная амплитуда колебаний не мала. За какое время вследствие трения шарик остановится. Как результат меняется с увеличением амплитуды. Во сколько раз изменится число “периодов”, если увеличить начальную амплитуду в два раза?

14. Жидкость ограничена двумя твердыми границами при $y = 0$ и $y = d$, в начальный момент она находится в состоянии покоя, а ее движение возникает в результате того, что нижняя граница мгновенно приобретает постоянную скорость u , верхняя остается неподвижной. Определить скорость течения.

15. Получить дисперсионное уравнение для волн в изотермической атмосфере из идеального газа, который находится в поле тяжести $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Ограничиться возмущениями с волновым вектором $\vec{k} = (k, 0, 0)$ в рамках ВКБ-приближения ($2\pi/k$ мало по сравнению с характерной вертикальной шкалой неоднородности равновесного газа). Учесть теплопроводность и вязкость. *Ответ:*
$$\left\{ \omega - \frac{k^2 c_T^2}{\omega + ik^2 \eta} - \frac{g^2/c_T^2}{\omega + i\nu k^2} \right\} (\omega + i\chi k^2) - \left\{ \omega - \frac{g^2/c_T^2}{\omega + i\nu k^2} \right\} \frac{(\gamma - 1) k^2 c_T^2}{\omega + ik^2 \eta} = 0, \quad \eta = 4\nu/3 + \mu, \quad \chi = \alpha/\rho_0 c_V.$$

16. Определить закон дисперсии звуковой волны в однородной среде с учетом теплопроводности газа. В случае слабой теплопроводности получить поправку к частоте в линейном по χ приближении.

Ответ:
$$\omega = kc_s - i \frac{k^2}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \chi.$$

17. Получить закон движения капелек масла в вязкой среде для известного опыта Милликена по определению заряда электрона. Маленькие капельки рассеяны в воздухе между горизонтальными пластинами конденсатора. Вследствие действия поверхностных сил капли имеют форму сферы и можно воспользоваться законом Стокса. Если воздух ионизован, то один или несколько ионов присоединяются к капле и на каплю действует электрическая сила.

Ответ: Скорость определяется уравнением

$$neE - \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_1 - \rho_2) g - 6\pi\mu Rv = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_1 v$$

. Решение этого уравнения не вызывает затруднений.

18. Определить закон дисперсии звуковых волн с учетом диссипативных эффектов (вязкости и теплопроводности). Считать, что диссипация слабая, вычисления провести в линейном приближении по диссипативным приближениям.

Ответ:
$$\omega = kc_s - i \frac{k^2}{2} \left\{ \left(\frac{4\nu}{3} + \mu \right) + \chi \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \quad (\chi = \alpha/\rho_0 c_V).$$

19. Поток жидкости движется с постоянной скоростью в круглой длинной трубе длиной L и радиусом R . Будем считать, что изменением температуры по радиусу можно пренебречь. Между жидкостью и стенкой происходит теплообмен с коэффициентом теплопередачи k . Температура на выходе трубы и на стенке поддерживается равной T_0 , а на входе равна T_L . Найти распределение температуры жидкости вдоль трубы.
20. Пусть в начальный момент времени распределение скорости вязкой жидкости имеет вид: $u(z, 0) = \begin{cases} u_0, & z > 0 \\ -u_0, & z < 0 \end{cases}$. Определить как со временем будет изменяться скорость.
21. Найти скорость ламинарного вязкого течения жидкости через трубу эллиптического сечения (a и b — полуоси сечения трубы). Разность давления на расстоянии l равна Δp . Определить расход течения.
Ответ: $u(x, y) = \frac{\Delta p a^2 b^2}{2\mu l (a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$; $Q = \frac{\Delta p \pi a^3 b^3}{4\mu l (a^2 + b^2)}$.
22. На жидкость действует сила тяжести, жидкость ограничена сверху свободной поверхностью, снизу неподвижной плоскостью, наклоненной к горизонту под углом β . Вычислить количество энергии, которая диссипируется в таком течении.
Ответ: $E = \rho^2 g^2 \sin^2 \beta (h - z)^2 / \mu$.
23. Определить декремент затухания звуковых волн в диссипативной среде с учетом зависимости динамической вязкости от температуры $\eta = A\sqrt{T}/(1 + B/T)$ (формула Сезерленда, A и B — константы).
24. В начальный момент времени подводная лодка находится на поверхности моря. Глубина составляет 500 м. Первая динамическая вязкость воды равна $\eta = 0.01$ г/с·см. Объем лодки — 10000 м³, а масса — 12000 т. Лодка начинает погружаться с выключенными двигателями. Через какое время она окажется на дне? *Указание:* считать, что лодка имеет форму шара.
25. Обобщите волновое уравнение для звуковых волн $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} = 0$ на случай диссипативной среды (коэффициенты диссипации малы).
26. Пузырек газа радиусом R_0 находится в вязкой несжимаемой жидкости с давлением p_0 , плотностью ρ_0 и коэффициентом динамической вязкости η . Пузырек совершает радиальные колебания.

Определить частоту колебаний пузырька. Рассмотреть случай идеальной жидкости. *Ответ:* радиус пузырька меняется по закону

$$r = R_0 + R \cdot \exp(-i\omega t), \quad \omega = -\frac{2i\eta}{\rho_0 R_0^2} \pm \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_0^2} - \frac{4\eta^2}{\rho_0^2 R_0^4}}.$$

5.4. Понятие о турбулентности

Как правило, жидкая среда, встречающаяся на Земле и в космосе, находится в турбулентном состоянии. Устоявшегося и однозначного определения турбулентности до сих пор нет. В основе явления турбулентности лежит большое разнообразие взаимодействующих пространственных структур нестационарного течения.

В случае малого безразмерного числа Рейнольдса $Re \ll 1$ динамика жидкости имеет простой характер (ламинарное течение). С увеличением числа Рейнольдса⁶ решения оказываются не единственными, возникают неустойчивые решения. Стационарные движения становятся периодическими, квазипериодическими или непериодическими по времени, возникают сложные пространственные структуры. Течение становится турбулентным.

Гидродинамическая турбулентность не является хаотическим (в смысле непредсказуемости) движением. Турбулентный хаос обладает определенной упорядоченностью, на что указывает далекий от равномерного Колмогоровский⁷ спектр распределения кинетической энергии $F(k) \propto k^{-11/3}$ (k — волновое число). Можно считать, что турбулентность — это свойство вихревых течений принимать стохастический характер.

Упорядоченные структуры в турбулентных течениях возникают в случайные моменты времени, в случайных местах, со случайным временем жизни. Такие структуры — их называют когерентными — рассматривает *синергетика* (наука о процессах самоорганизации), изучая образование “порядка из хаоса”.

Для турбулентности важнейшими понятиями являются бифуркации, странные аттракторы, фрактальность.

⁶РЕЙНОЛЬДС (Рейнолдс) Осборн (1842-1912), английский физик и инженер. Основные труды по теории динамического подобия, течению вязкой жидкости, теориям турбулентности и смазки. Экспериментально установил (1883 г.) один из критериев подобия — число Рейнольдса.

⁷Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — один из великих математиков XX века, автор основополагающих трудов по теории множеств, математической логике, топологии, теории информации, теории динамических систем, теории вероятностей и математической статистики.

Основная идея теории турбулентности Ландау Л.Д. (1908–1968)

Имеется стационарное устойчивое решение при достаточно малых числах Рейнольдса. При больших значениях Re течение теряет устойчивость. Пусть скорость жидкости становится периодической с частотой ω_1 . При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса периодический режим в свою очередь теряет устойчивость. Появляется вторая частота ω_2 и устанавливается квазипериодический режим. В результате последовательной дестабилизации все большего числа колебательных мод появляется упорядоченный набор частот $\omega_3, \omega_4, \dots, \omega_n$. С ростом числа Re разность между числами Рейнольдса, при которых появляются новые частоты, уменьшается. А новые появляющиеся движения имеют все более мелкие масштабы. Возникает каскад движений (турбулентных ячеек, вихрей), которые различаются характерными размерами и скоростями. При очень больших n спектр содержит широкую полосу, в результате получается турбулентное течение.

Для продолжения образования по физике турбулентности см. [4, 8, 14, 25, 48] и др.

Глава 6

Представление о плазме и ее свойствах

6.1. Особенности движения заряженной жидкости

Под *плазмой* понимают ионизованный газ малой плотности. Свойства плазмы определяются дальнедействующими кулоновскими силами. Сила взаимодействия фиксированной заряженной частицы с ближайшими частицами много меньше кулоновского взаимодействия с большим числом далеких частиц.

Подавляющая часть наблюдаемого вещества (более 90 %) во Вселенной относится к плазме, с которой связано магнитное поле и для описания заряженной среды динамика жидкости должна быть объединена с уравнениями Максвелла¹. Вопрос о генерации магнитного поля Солнца и Земли является важнейшим для понимания многих процессов на Земле и в Солнечной системе.

Рассмотрим пробную заряженную частицу (для определенности ион). Электроны в ближайшей окрестности притягиваются к нему и экранируют электростатическое поле иона (рис. 6.1). В результате поле неподвижного заряда q в плазме ослабляется и принимает вид

$$U = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad (6.1)$$

где r_D — Дебаевский радиус экранирования:

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n e^2}}, \quad (6.2)$$

где n — концентрация электронов (или ионов), T — температура, k — постоянная Больцмана².

¹МАКСВЕЛЛ Джемс Клерк (1831–1879). Его теоретическая работа по электромагнетизму окупала все последующие расходы на фундаментальную науку до конца нашей цивилизации

²БОЛЬЦМАН, Людвиг (Boltzmann, Ludwig) (1844–1906) — австрийский физик. Автор важнейших исследований в области кинетической теории газов, вывел закон распределения молекул газа по скоростям, обобщив распределения Максвелла на случай, когда на газ действуют внешние силы (статистика Больцмана), создатель основ классической статистической физики.

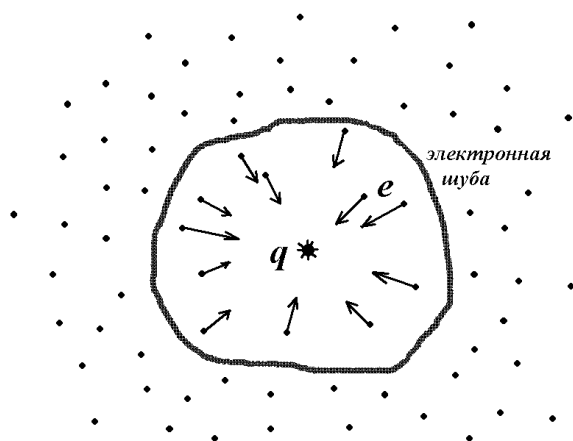


Рис. 6.1. Вокруг иона возникает “электронная шуба”

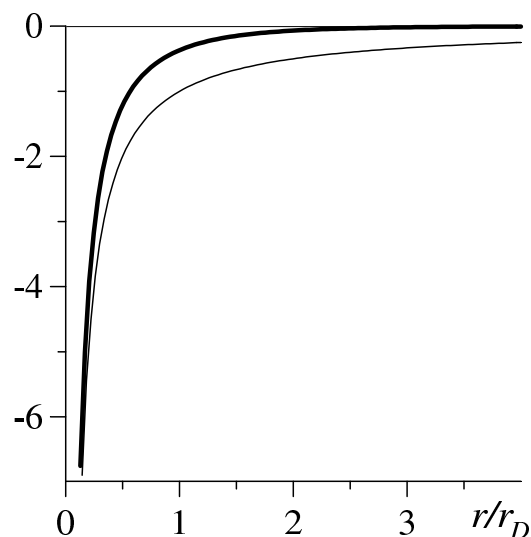


Рис. 6.2. Зависимость потенциалов от радиуса (толстая линия — дебаевский потенциал, тонкая линия — кулоновский потенциал). В области $r \lesssim r_D/4$ различие незначительно. На расстоянии $r \gtrsim 2r_D$ имеем сильную экранировку.

Дебаевский³ радиус определяет область влияния пробного заряда в плазме. В области $r \ll r_D$ из формулы (6.1) получается $U \simeq q/r$ — обычный электростатический потенциал одиночного заряда (рис. 6.2). На больших расстояниях $r \gg r_D$ потенциал очень быстро ослабляется, т.к. $\frac{q}{r} \exp(-r/r_D) \ll \frac{q}{r}$.

Если проводящая жидкая или газообразная среда (плазма) находится в магнитном поле, то при ее движении индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. На токи в магнитном поле действуют силы, которые в свою очередь влияют на движение жидкости. С другой стороны, эти токи меняют и сами электрические и магнитные поля. Согласно уравнениям Максвелла, эти поля определяются распределением плотности заряда. Поэтому электрические и магнитные поля в плазме являются самосогласованными полями. В результате возникает сложное взаимодействие магнитных и гидродинамических явлений, которые необходимо рассматривать на основе совместной системы уравнений электромагнитного поля и уравнений движения сплошной сре-

³ДЕБАЙ (Debye) Петер (1884–1966) — физик, Нобелевский лауреат 1936 г по химии “за вклад в наше понимание молекулярной структуры в ходе исследований дипольных явлений и дифракции рентгеновских лучей и электронов в газах”.



Рис. 6.3.

ды (рис. 6.3).

6.2. Уравнения магнитной гидродинамики

Главное приближение модели МГД-жидкости связано с пренебрежением тока смещения в уравнениях Максвелла. Такое нерелятивистское рассмотрение соответствует условию

$$V_0 \ll c. \quad (6.3)$$

где V_0 — характерная скорость движения плазмы, c — скорость света.

Будем считать, что $\mu = 1$ ($\vec{B} = \mu \vec{H}$) и МГД-жидкость является идеальной. Тогда уравнения магнитной гидродинамики примут следующий вид (в системе СГС):

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{u} \times \vec{H}), \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}), \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi} \right) = -\operatorname{div} \vec{q}, \quad (6.8)$$

где $\vec{q} = \rho \vec{u} \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{H} \times (\vec{u} \times \vec{H}))$. Данная система магнитогидродинамических уравнений описывает идеальную жидкость, для которой вязкость и теплопроводность не существенны.

В МГД-жидкости помимо вязкости и теплопроводности диссипативные процессы определяются дополнительными коэффициентами переноса, в частности, электрической проводимостью σ .

Уравнение (6.5) для диссипативной среды принимает вид:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{u} \times \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}. \quad (6.9)$$

Запишем обобщение уравнения Навье-Стокса на случай МГД-жидкости:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u} + \left(\mu + \frac{\nu}{3}\right) \vec{\nabla} (\text{div } \vec{u}) - \frac{1}{4\pi\rho} [\vec{H} \times \text{rot} \vec{H}]. \quad (6.10)$$

Уравнение переноса тепла должно быть дополнено слагаемым, учитывающим выделение тепла при протекании тока.

6.3. Задачи на уравнения МГД

1. Определить эволюцию покоящейся в начальный момент времени равномерно заряженного шарового скопления пыли (под пылью будем понимать сплошную среду с равным нулю давлением). Начальная плотность пыли ρ_0 , плотность заряда $\alpha\rho$, начальный радиус r_0 .

Ответ: $\rho(t) = \frac{\rho_0}{f^3(\omega_0 t)}$, где $\omega_0 = \left(\frac{8\pi\alpha^2\rho_0}{3}\right)^{1/2}$, а функция f определяется уравнением $\omega_0 t = \int_1^f \frac{dx}{\sqrt{1-1/x}}$.

2. Покажите, что если отношение средней кинетической энергии к средней энергии взаимодействия между частицами велико, то внутри объема радиуса r_D находится много частиц ($N \gg 1$).
3. Записать условие равновесия на границе, разделяющей идеальную плазму и магнитное поле.
4. Частица с зарядом q и массой m рождается в состоянии покоя в скрещенных электрическом и магнитном полях и движется со скоростью дрейфа $\frac{c}{B^2} [\vec{E} \vec{B}]$. Показать, что энергии вращения и дрейфового движения равны друг другу.
5. Получить выражение для изменения кинетической энергии за один период вращения электрона в постоянном магнитном поле \vec{B} и перпендикулярном электрическом поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$, который в начальный момент времени находился в покое.

6. Между двумя параллельными плоскостями движется вязкая проводящая несжимаемая жидкость. Перпендикулярно плоскости приложено внешнее однородное магнитное поле H_0 . Расстояние между плоскостями равно a . Найти распределение скоростей и определить структуру магнитного поля в жидкости. Нарисовать профили течения при различных значениях H_0 .

$$\text{Ответ: } u = u_0 \frac{ch(a/\Delta) - ch(z/\Delta)}{ch(a/\Delta) - 1},$$

$$H_x = -\frac{u_0}{c} 4\pi\sqrt{\sigma\eta} \frac{(z/a)sh(a/\Delta) - sh(z/\Delta)}{ch(a/\Delta) - 1}, \quad \Delta = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}.$$

7. Покажите, что условие (6.3) эквивалентно тому, что второе слагаемое

$$\text{в уравнении Максвелла } [\vec{\nabla} \vec{B}] = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ мало.}$$

8. Рассмотрим течение в направлении x несжимаемой вязкой проводящей жидкости между двумя параллельными плоскостями при наличии однородного постоянного магнитного поля. Напряженность внешнего магнитного поля \vec{H}_0 перпендикулярна плоскостям. Определить профиль скорости $v(z)$ и полное магнитное поле $\vec{H}(y) = H_0 \cdot \vec{e}_z + H_1(z) \cdot \vec{e}_x$. *Ответ:* $v = A_1 (1 - \exp\{-\alpha(l/2 - |z|)\})$, $H_1 = A_2 (\exp\{-\alpha(l/2 - |z|)\} - 2z/l)$, где l — расстояние между плоскостями, параметр α определяется полем H_0 и диссипативными коэффициентами. Определите выражения для постоянных A_1 и A_2 .

6.4. Линейные волны в МГД-жидкости

Без учета магнитного поля в однородной нейтральной среде могут распространяться только акустические (звуковые) волны (см. п. 5.2.1), свойства которых определяются дисперсионным уравнением (5.41).

Магнитное поле приводит к появлению новых типов колебаний. Рассмотрим динамику малых возмущений аналогично п. 5.2.1, основываясь на системе МГД-уравнений (6.4)–(6.8). Равновесные параметры среды характеризуются плотностью $\varrho_0(z)$, давлением $p_0(z)$, магнитным полем $\vec{B}_0(z)$.

Проведем процедуру линеаризации системы уравнений, представляя каждую величину в виде

$$f(x, y, z, t) = f_0(z) + \tilde{f}(x, y, z, t), \quad \tilde{f} = \hat{f}(z) \cdot \exp\{-i\omega t + ik_x x + ik_y y\}. \quad (6.11)$$

Ограничимся случаем $\vec{B}_0 = \{B_0, 0, 0\}$, что приводит к условию равновесия

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{P}_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = -\varrho_0 g, \quad (6.12)$$

где $g = \partial\Psi/\partial z$. Запишем вертикальное смещение ξ через z -компоненту скорости

$$w = \tilde{w} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -i\omega \xi. \quad (6.13)$$

Исключая возмущения скорости \tilde{u} , \tilde{v} , магнитного поля \tilde{B}_x , \tilde{B}_y , \tilde{B}_z и плотности $\tilde{\varrho}$, получаем линейную систему уравнений относительно вертикального смещения $\hat{\xi}$ и величины $\hat{J} = \hat{\mathcal{P}} + \frac{\vec{B}_0 \vec{B}}{4\pi}$ (имеет смысл полного возмущенного давления с учетом магнитного давления):

$$\frac{d\hat{J}}{dz} = \varrho_0 \left\{ \omega_A^2 + \frac{g}{\varrho_0} \frac{\partial\varrho_0}{\partial z} + \frac{g^2}{c_s^2 + V_A^2} \left[1 - \frac{\Omega_M^2 M_A^2}{\omega_\Omega^2} \right] \right\} \cdot \hat{\xi} - \frac{g}{1 + M_A^2} \left\{ 1 + \frac{\Omega_M^2}{\omega_\Omega^2} \right\} \cdot \frac{\hat{J}}{c_s^2}, \quad (6.14)$$

$$\frac{d\hat{\xi}}{dz} = \frac{g/c_s^2}{1 + M_A^2} \left\{ 1 + \frac{\Omega_M^2}{\omega_\Omega^2} \right\} \cdot \hat{\xi} + \frac{\hat{J}}{\varrho_0 \omega_A^2} \cdot \left\{ k^2 - \frac{\omega^4 - \omega^2 \Omega^2 k^2 c_s^2 (1 + M_A^2) / \omega_A^2}{(c_s^2 + V_A^2) \cdot \omega_\Omega^2} \right\}, \quad (6.15)$$

где введены обозначения $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $c_s^2 = \gamma \mathcal{P}_0 / \varrho_0$, $\vec{V}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\varrho_0}}$ — альфвеновская скорость, $\Omega_A = (\vec{B}_0 \vec{k}) / \sqrt{4\pi\varrho_0}$, $M_A = V_A / c_s$, $\Omega_M^2 = \Omega_A^2 / (1 + M_A^2)$, $\hat{\omega}_A^2 = \hat{\omega}^2 - \Omega_A^2$, $\hat{\omega}_\Omega^2 = \hat{\omega}^2 - \Omega_M^2$. Система уравнений справедлива для произвольных зависимостей $g(z)$, $B_0(z)$, $\varrho_0(z)$, причем $B_0(z)$ и $\varrho_0(z)$ могут быть разрывными при выполнении (6.12).

Дополнив систему уравнений (6.14), (6.15) граничными условиями в точке $z = 0$ и требованием невозрастания возмущенных величин на бесконечности:

$$\xi(z = \pm\infty) = 0, \quad J(z = \pm\infty) = 0, \quad (6.16)$$

получаем задачу на собственные значения.

Можно ограничиться ВКБ-приближением для решений (6.14), (6.15). Решением линеаризованных уравнений являются функции вида $\hat{f} \propto \exp(ik_z z)$.

Дисперсионное уравнение, описывающее динамику волн в однородной среде при наличии магнитного поля $\vec{B}_0 = (B_0, 0, 0)$, имеет вид:

$$\left[\omega^2 - \Omega_A^2 \right] \left\{ \omega^4 - k^2 (c_s^2 + V_A^2) \omega^2 + \Omega_A^2 c_s^2 k^2 \right\} = 0. \quad (6.17)$$

В общем случае уравнение (6.17) определяет три типа мод: быстрые магнитозвуковые волны ω_1^2 , медленные магнитозвуковые (вихревые) ω_2^2 и альфвеновские $\omega_3^2 = \Omega_A^2$. Условие равенства нулю фигурных скобок в (6.17) приводит к:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ k^2 (c_s^2 + V_A^2) \pm \sqrt{k^4 (c_s^2 + V_A^2)^2 - 4\Omega_A^2 c_s^2 k^2} \right\}. \quad (6.18)$$

В пределе $\Omega_A = 0$ имеем $\omega_1^2 = k^2 c_s^2$, $\omega_2^2 = k^2 V_A^2$.

6.5. Задачи на волны в МГД-жидкости

1. Получить выражение для плазменной частоты $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$ (n — концентрация заряженных частиц, m — масса электрона, e — заряд электрона).
2. Верхнее полупространство занимает плазма, нижнее — магнитное поле. Сила тяжести перпендикулярна границе раздела плазма-магнитное поле. Изучить динамику малых возмущений границы раздела. Получить дисперсионное уравнение.
3. Верхнее полупространство занимает магнитное поле, нижнее — плазма. Сила тяжести перпендикулярна границе раздела плазма-магнитное поле. Изучить динамику малых возмущений границы раздела. Получить дисперсионное уравнение.
4. Определить коэффициент поглощения линейной магнитогидродинамической волны в несжимаемой среде $\gamma \equiv \langle Q \rangle / 2\langle q \rangle$, где $\langle Q \rangle$ — среднее по времени значение энергии, которая диссипируется за единицу времени в единице объема, $\langle q \rangle$ — средняя плотность потока энергии в волне. *Ответ:* $\gamma = \frac{\omega^3}{2u_1^3} \left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right)$, где $u_1 = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$.
5. Получить закон дисперсии для электромагнитных волн, распространяющихся в холодной плазме без учета внешнего магнитного поля. *Указание:* МГД-приближение не описывает электромагнитные волны. *Ответ:* $\omega = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2}$, где $\omega_{pe}^2 = 4\pi n e^2 / m$ — квадрат плазменной частоты электронов, n — концентрация, m — масса электрона.

6. Сделайте оценку расстояния от Земли, на котором формируется фронт ударной волны при натекании солнечного ветра со скоростью v и концентрацией n на магнитосферу Земли. *Ответ:* $R_{sh} \sim (m_{\oplus}^2 / 16\pi n M v^2)^{1/6}$, $m_{\oplus} = 8 \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$.
7. Для изотермической солнечной короны (в случае высокой теплопроводности) определить радиальную зависимость температуры, при которой осуществляется сверхзвуковой режим истечения солнечного ветра. *Ответ:* $\left| r \frac{d}{dr} \frac{GmM_{\odot}}{rT} \right| > 2$.
8. ИОННО-АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. При рассмотрении плазмы инерцией электронов в ряде случаев можно пренебречь в силу $m_e \ll m_i$ ($m_{e,i}$ — масса электрона и иона соответственно). Будем считать, что температура ионов мала по сравнению с температурой электронного газа $T_i \ll T_e$. Динамика ионов определяется законами сохранения массы и импульса:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i u_i) = 0, \quad (6.19)$$

$$m_i \frac{du_i}{dt} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (6.20)$$

где n — концентрация, Φ — потенциал. Распределение потенциала определяется уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_e - n_i), \quad (6.21)$$

т.е. зависит от разности концентраций электронов и ионов в данной точке пространства. Считаем, что для электронной компоненты имеется баланс электростатической силы и градиента давления

$$en_e \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial p_e}{\partial x} = k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x}. \quad (6.22)$$

После интегрирования (6.22) имеем $n_e = n_0 \exp\left(\frac{e}{k_B T_e} \Phi\right)$, где n_0 — равновесная концентрация. Получить дисперсионное уравнение для волн в модели (6.19)–(6.21).

Ответ: $\omega^2 = \omega_p^2 \frac{k^2 r_D^2}{1 + k^2 r_D^2}$, где $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}}$ — плазменная частота, $r_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi e^2 n_0}}$ — дебаевская длина волны.

Глава 7

Метрика криволинейных систем координат

7.1. Метрический тензор

При решении прикладных задач, постановка которых связана с той или иной симметрией изучаемого объекта или движения среды, удобнее использовать не декартовую, а какую-либо криволинейную систему координат. Для этого необходимо уметь записывать уравнения гидродинамики в данной криволинейной системе координат.

Рассмотрим систему декартовых координат $\{x_0^1, x_0^2, x_0^3\}$ и произвольную криволинейную систему координат $\{x^1, x^2, x^3\}$. Пусть заданы прямое и обратные преобразования от одних координат к другим:

$$x^i = x^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \quad x_0^k = x_0^k(x^1, x^2, x^3), \quad (7.1)$$

$$dx_0^k = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} dx^i \quad (7.2)$$

(по дважды повторяющемуся индексу имеем суммирование). Величина

$$dl^2 = (dx_0^1)^2 + (dx_0^2)^2 + (dx_0^3)^2 = \frac{\partial x_0^m}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^m}{\partial x^k} dx^i dx^k = g_{ik}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k \quad (7.3)$$

является инвариантом относительно преобразования координат и

$$g_{ik} = \frac{\partial x_0^m}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^m}{\partial x^k} \quad (7.4)$$

называется симметричным *метрическим тензором*. Суммирование в (7.3) проводится по дважды повторяющемуся индексу, один из которых записан вверху, а другой внизу. При этом считается, что индекс j в производной $\partial x_0^k / \partial x^j$ является нижним, и суммирование происходит только с участием одного верхнего и одного нижнего индексов.

Контравариантным вектором A^i называется совокупность $N = 3$ величин, для которых при преобразовании координат выполняется

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} A_0^k. \quad (7.5)$$

Аналогично для контравариантного тензора \hat{B} ранга M :

$$B^{ij\dots k} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^m} \frac{\partial x^j}{\partial x_0^p} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial x_0^l} B_0^{mp\dots l}. \quad (7.6)$$

Определим *ковариантный вектор* A_i :

$$A_i = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} A_{0k}. \quad (7.7)$$

Любой тензор можно записать как в ковариантной, так и в контравариантной (а также смешанных) формах. Поскольку переход должен определяться характером метрики криволинейной системы координат, а метрику характеризует только метрический тензор, то выполняется:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad B_{ik} = g_{im} g_{kn} B^{mn}. \quad (7.8)$$

Используя соотношения (7.5) – (7.7) можно определить ковариантный тензор произвольного ранга $B_{ijk\dots p}$ или смешанные тензоры $C_{lm\dots n}^{ij\dots k}$. Метрический тензор (7.4) является ковариантным тензором второго ранга и в декартовой системе координат имеем

$$g_{ik}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Связь (7.8) можно рассматривать, как операцию опускания индексов. Пусть обратная операция производится тензором G^{ik} :

$$A^k = G^{ki} A_i, \quad (7.10)$$

поскольку $A^k = G^{ki} A_i = G^{ki} g_{im} A^m$, то $G^{ki} g_{im} = \delta_m^k$ (δ_m^k определяется также (7.9)). Тензор $G^{ki} = g^{ki}$ называется контравариантным метрическим.

7.2. Ковариантное дифференцирование

Возьмем дифференциал от (7.5):

$$dA^i = d\left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} A_0^k\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} dA_0^k + A_0^k \frac{\partial^2 x^i}{\partial x_0^k \partial x_0^m} dx_0^m = \frac{\partial A^i}{\partial x^m} dx^m. \quad (7.11)$$

Как видим, dA^i не является вектором из-за второго слагаемого в (7.11). Величина dA^i имеет смысл разности двух векторов в двух близлежащих

точках, но в разных точках законы преобразования координат различны.

Таким образом, $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ — не тензор.

Получим дифференциал ковариантного вектора, являющийся вектором. Для этого предварительно параллельным переносом совместим вектора в одну точку. Обозначим изменение компонента вектора при параллельном переносе δA^i . Определим разность между векторами в точке $x^i + dx^i$

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (7.12)$$

Поскольку сумма должна преобразовываться так же, как произвольный вектор, то δA^i линейно зависит от A^i . Будем считать так же линейность по dx^m . В результате имеем

$$\delta A^i = -\Gamma_{nm}^i A^n dx^m, \quad (7.13)$$

где Γ_{nm}^i — символы Кристоффеля¹ (эта величина не является тензором, поскольку δA^i — не вектор, а A^n и dx^m — векторы).

Определим вид Γ_{km}^i . Поскольку скаляр $A_i B^i$ при параллельном переносе не изменяется, то $\delta(A_i B^i) = 0$. В результате $B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = A_i \Gamma_{km}^i B^k dx^m \equiv \Gamma_{im}^k A_k B^i dx^m$ и

$$\delta A_i = \Gamma_{im}^k A_k dx^m. \quad (7.14)$$

Таким образом, выражения для ковариантных производных принимает вид

$$\frac{DA^i}{dx^m} = \frac{\partial A^i}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^i A^k, \quad (7.15)$$

$$\frac{DA_i}{dx^m} = \frac{\partial A_i}{\partial x^m} - \Gamma_{im}^k A_k. \quad (7.16)$$

Символы Кристоффеля симметричны относительно нижних индексов $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$.

Принимая во внимание, что $DA_i = g_{ik} DA^k$ и $DA_i = Dg_{ik} A^k = A^k Dg_{ik} + g_{ik} DA^k$ имеем $Dg_{ik} \equiv 0$. В результате:

$$\frac{Dg_{ik}}{dx^m} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - \Gamma_{im}^l g_{lk} - \Gamma_{mk}^l g_{il} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - \Gamma_{k,im} - \Gamma_{i,mk}, \quad (7.17)$$

поскольку $g_{ik} \Gamma_{rs}^k \equiv \Gamma_{i,rs}$.

Для всех циклических перестановок имеем:

$$-\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} = -\Gamma_{k,mi} - \Gamma_{m,ik}; \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} = \Gamma_{i,km} + \Gamma_{k,im}; \quad \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = \Gamma_{m,ik} + \Gamma_{i,mk}. \quad (7.18)$$

¹КРИСТОФФЕЛЬ (Christoffel) Эльвин Бруно (1829–1900), немецкий математик, профессор Политехникума в Цюрихе, профессор Страсбургского университета.

Аналогично имеет место условие симметрии $\Gamma_{k,im} = \Gamma_{k,mi}$. Для полу-суммы трех уравнений (7.18) получаем

$$\Gamma_{i,km} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} \right\}, \quad (7.19)$$

$$\Gamma_{km}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right\}. \quad (7.20)$$

Поскольку размерности ковариантных и контравариантных тензоров не совпадают, то следует использовать *физические компоненты тензоров*:

$$\hat{A}_i = \sqrt{g_{ii}} A^i, \quad \hat{B}_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} B^{ik}. \quad (7.21)$$

Поскольку все уравнения, описывающие физические процессы, являются тензорными, то все производные по координатам следует заменить на ковариантные производные в криволинейных системах координат. Данный алгоритм пригоден для произвольных криволинейных систем координат, включая неортогональные. В случае ортогональных систем координат можно использовать более простые преобразования Ламэ.

7.3. Дифференциальные операторы

В качестве примера построим основные дифференциальные операторы, входящие в уравнения гидродинамики, в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , которая связана с декартовой системой соотношениями:

$$x_0 = r \cos \varphi, \quad y_0 = r \sin \varphi, \quad z_0 = z. \quad (7.22)$$

Предварительно определим с помощью (7.4), (7.10), (7.19), (7.20) компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad g_{zz} = 1, \quad (7.23)$$

$$g^{rr} = 1, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{zz} = 1, \quad (7.24)$$

$$\Gamma_{r,\varphi\varphi} = -r, \quad \Gamma_{\varphi,r\varphi} = r, \quad (7.25)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (7.26)$$

Остальные компоненты равны нулю.

В декартовой системе координат компоненты ковариантных и контравариантных векторов совпадают с физическими компонентами. В

случае цилиндрической системы координат для компонент ковариантных и контравариантных векторов имеем:

$$\begin{cases} A_r = A_{0x} \cos \varphi + A_{0y} \sin \varphi \\ A_\varphi = -A_{0x} r \sin \varphi + A_{0y} r \cos \varphi \\ A_z = A_{0z}, \end{cases} \quad (7.27)$$

$$\begin{cases} A^r = A_{0x} \cos \varphi + A_{0y} \sin \varphi \\ A^\varphi = -\frac{A_{0x}}{r} \sin \varphi + \frac{A_{0y}}{r} \cos \varphi \\ A^z = A_{0z}. \end{cases} \quad (7.28)$$

В результате для дивергенции вектора получаем

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{DA^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^i A^k = \frac{\partial \hat{A}_r}{\partial r} + \frac{\hat{A}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{A}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial z}, \quad (7.29)$$

а для компонент вектора $(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}$:

$$\{(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}\}_r = A^i \frac{D}{\partial x^i} B^r = \hat{A}_r \frac{\partial \hat{B}_r}{\partial r} + \frac{\hat{A}_\varphi}{r} \frac{\partial \hat{B}_r}{\partial \varphi} + \hat{A}_z \frac{\partial \hat{B}_r}{\partial z} - \frac{\hat{A}_\varphi \hat{B}_\varphi}{r}, \quad (7.30)$$

$$\{(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}\}_\varphi = \hat{A}_r \frac{\partial \hat{B}_\varphi}{\partial r} + \frac{\hat{A}_\varphi}{r} \frac{\partial \hat{B}_\varphi}{\partial \varphi} + \hat{A}_z \frac{\partial \hat{B}_\varphi}{\partial z} + \frac{\hat{A}_\varphi \hat{B}_r}{r}, \quad (7.31)$$

$$\{(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}\}_z = \hat{A}_r \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial r} + \frac{\hat{A}_\varphi}{r} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial \varphi} + \hat{A}_z \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}. \quad (7.32)$$

Для компонент градиента имеем:

$$\nabla_i = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}; \frac{\partial}{\partial \varphi}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad (7.33)$$

$$\nabla^i = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad (7.34)$$

$$\hat{\nabla}_i = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (7.35)$$

Оператор Лапласа, действующий на скалярную функцию:

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{D}{\partial x^i} \nabla^i \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (7.36)$$

Уравнение Навье-Стокса содержит оператор Лапласа, действующий на вектор скорости. Соответствующие компоненты равны:

$$\Delta \hat{u}_r = \Delta u^r = \nabla_k \nabla^k u^r = g^{ik} \nabla_i \nabla_k u^r = g^{ik} \frac{D}{\partial x^i} \left(\frac{Du^r}{\partial x^k} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= g^{ik} \frac{D}{\partial x^i} \left(\frac{\partial u^r}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^r u^m \right) = \\
g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial u^r}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^r u^m \right) &+ g^{ik} \left[\Gamma_{ni}^r \left(\frac{\partial u^n}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^n u^m \right) - \Gamma_{ki}^n \left(\frac{\partial u^r}{\partial x^n} + \Gamma_{mn}^r u^m \right) \right] = \\
&= \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\hat{u}_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r}, \quad (7.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u^\varphi &= \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial u^\varphi / r}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} + \frac{u^\varphi}{r^2} = \\
&\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial r} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} \right). \quad (7.38)
\end{aligned}$$

Переходя к физическим компонентам, имеем $\Delta \hat{u}_\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta u^\varphi = r \Delta u^\varphi$.

7.4. Задачи

1. Записать уравнение переноса тепла (5.55) в цилиндрической системе координат.
2. Записать МГД-уравнения в: а) цилиндрической системе координат, б) сферической системе координат.
3. Показать, что в цилиндрической системе координат для произвольного вектора \vec{A} справедливо: $(\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$, $(\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}$, $(\Delta \vec{A})_z = \Delta A_z$.
4. Показать, что в сферической системе координат для произвольного вектора \vec{A} справедливо: $(\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta A_\Theta) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$, $(\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \Theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \text{ctg} \Theta \frac{\partial A_\Theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \sin \Theta} \right]$.
5. Получить формулу для $\text{rot } \vec{A}$ в а) цилиндрической, б) сферической системах координат.
6. Записать уравнения Максвелла в а) цилиндрической, б) сферической системах координат.
7. Записать волновое уравнение (5.39) в а) эллиптических координатах (ξ, η, φ) :

$$r = a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = a \xi \eta, \quad a = \text{const},$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, $1 \leq \xi < \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$.

б) параболических координатах (ζ, ϖ, φ) :

$$z = \frac{1}{2}(\zeta - \varpi), \quad r = \sqrt{\zeta \varpi},$$

где $0 \leq \zeta < \infty$, $0 \leq \varpi < \infty$.

8. Записать уравнение Навье–Стокса (5.54) в цилиндрической системе координат. *Ответ:*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \\ & + \left(\frac{4\nu}{3} + \mu \right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \left(\frac{\nu}{3} + \mu \right) \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{r \partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) - \\ & - \left(\frac{7\nu}{3} + \mu \right) \frac{\partial u_\varphi}{r^2 \partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) + \left(\frac{\nu}{3} + \mu \right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{r \partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_z}{r \partial z \partial \varphi} \right) + \\ & + \left(\frac{7\nu}{3} + \mu \right) \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial u_r}{r^2 \partial \varphi} \right] + \nu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial u_z}{r \partial r} \right) + \left(\frac{\nu}{3} + \mu \right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial u_r}{r \partial z} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{r \partial z \partial \varphi} \right) + \\ & + \left(\frac{4\nu}{3} + \mu \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Список литературы

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969, 824 с.
2. Айзерман М.А. Классическая механика. 1980, М.: Наука, 368 с.
3. Альбом течений жидкости и газа. Под ред. Ван-Дайка М. М.: Мир, 1986
4. Арнольд В.И. Математические методы небесной механики. М.: Наука, 1974
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука, 1967, 512 с.
6. Белоцерковский О.В., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982, 392 с.
7. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. Из-во МГУ, 1974, 647 с.
8. Берже П., Помо И., Видал К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991
9. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во ИЛ, 1961, 206 с.
10. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982
11. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973, 778 с.
12. Веденов А.А. Задачник по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1981, 160 с.
13. Векштейн Г.Е. Физика сплошных сред в задачах. М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 208 с. (Новосибирск: изд-во НУ, 1991, 172 с.)
14. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. (под ред. Х.Суинни, Дж.Голлаба) М.: Мир, 1984, 344 с.
15. Горбачкий В.Г. Космическая газодинамика. М.: Наука, 1977, 360 с.
16. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966, 688 с.
17. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1986.
18. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортон В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996, 408 с.
19. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1977, 320 с.
20. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963, 728 с.
21. Крайнов В.П. Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. М.: Высшая школа, 1989, 224 с.
22. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975
23. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: ИИЛ, 1950, 427 с.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1986
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982
27. Литтлтон Р.А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 240 с.
28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Ленинград: ГИТТЛ, 1950, 678 с.
29. Лотов К.В. Физика сплошных сред. Ижевск, 2002, 148 с.
30. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947, 928 с.
31. Линь Ц.-Ц. Теория гидродинамической устойчивости. 1958, М.: ИЛ, 194 с.

32. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1975, 448 с.
33. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Ленинград: Гидрометеоздат, 1988, 424 с.
34. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. I. М.: Наука, 1965, 640 с.; Ч. II, 1967, 720 с.
35. Морозов А.Г. Введение в волновую гидродинамику. Волгоград, 1985
36. Morozov A.G. The fundamentals of theoretical mechanics and continuous media mechanics. Volgograd, 1991
37. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 336 с.
38. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1978, 575 с.
39. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1977, 395 с.
40. Петкевич В.В. Основы механики сплошных сред. М.: Эдиториал УРСС, 2001, 400 с.
41. Саранин В.А. Равновесие жидкости и его устойчивость. Простая теория и доступные опыты. М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 144 с.
42. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970, т.1, 492 с.; т.2, 568 с.
43. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977, 440 с.
44. Сысоев Н.Н., Шугаев Ф.В. Ударные волны в газах и конденсированных средах. М.: Изд-во МГУ, 1987, 133 с.
45. Хоперсков А.В. Компьютерное моделирование нелинейных волн. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2006, 61 с.
46. Циглер Ф. Механика твердых тел и жидкостей. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002, 912 с.
47. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988, 424 с.
48. Этюды о турбулентности. М.: Наука, 1994
49. Якоби К. Лекции по динамике. Ленинград: ГРОЛ, 1936, 271 с.
50. Яковлев В.И. Предыстория аналитической механики. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001, 328 с.

Учебное издание

Хоперсков Александр Валентинович
Храпов Сергей Сергеевич

Теоретическая механика
и основы механики сплошной среды
(теория и задачи)

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Издательство Волгоградского государственного университета.
400062, Волгоград, пр. Университетский, 100